

KLIZNI REŽIMI

U SISTEMIMA UPRAVLJANJA

Od kontinualne invarijantnosti do diskretne robusnosti

Senad Huseinbegović
Čedomir Milosavljević
Boban Veselić



Izdavač

Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet

Za izdavača

Prof. dr. Jasmin Velagić

Autori

Prof. dr. Senad Huseinbegović
Prof. dr. Čedomir Milosavljević
Prof. dr. Boban Veselić

Naziv djela

KLIZNI REŽIMI U SISTEMIMA UPRAVLJANJA - Od kontinualne invarijantnosti
do diskretne robusnosti

Recenzenti

Akademik prof. dr. Asif Šabanović, Akademija nauka i umjetnosti BiH
Prof. dr. Darko Mitić, Elektronski fakultet u Nišu, Univerzitet u Nišu
Prof. dr. Almir Salihbegović, Univerzitet u Sarajevu – Elektrotehnički fakultet

Tehnička obrada

Autori

Godina izdanja

2026

Odlukom Senata Univerziteta u Sarajevu broj 01-11-54/26 od 29.04.2026. godine,
ova monografija je dobila univerzitetsku saglasnost.

ISBN 978-9926-575-11-3

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke BiH
pod ID brojem 69695238

Ovaj rukopis ili njegovi dijelovi ne smije se reproducirati niti umnožavati
bez pismene saglasnosti autora.



UNIVERZITET U SARAJEVU
Elektrotehnički fakultet



KLIZNI REŽIMI U SISTEMIMA UPRAVLJANJA

Od kontinualne invarijantnosti do diskretne robusnosti

Senad Huseinbegović
Čedomir Milosavljević
Boban Veselić

Sarajevo, 2026. godina

*Ovu monografiju posvećujemo jednoj izuzetnoj osobi,
akademkinji, profesorici i naučnici
dr. Branislavi Peruničić-Draženović,
čiji je rad ostavio neizbrisiv trag u teoriji
sistema upravljanja promjenljive strukture.
Za sve nas bila je inspiracija, uzor i pouzdan vodič
kroz svijet nauke i intelektualne radoznalosti.*

Predgovor

U formulaciji gotovo svakog problema upravljanja postoji izvjesno neslaganje između stvarnog sistema i njegovog matematičkog modela dostupnog projektantu. Odstupanja mogu nastati zbog nemodelirane dinamike, nepoznavanja parametara ili aproksimacije složenog, najčešće nelinearnog, ponašanja sistema jednostavnijim modelom. Zadatak projektanta jeste da projektuje regulator sa ciljem postizanja željenih performansi odziva sistema uprkos neodređenostima. Ovakve okolnosti su prirodno usmjerile istraživanja ka razvoju metoda robusnog upravljanja.

Jedan od osnovnih pristupa robusnom projektovanju sistema upravljanja čine sistemi upravljanja promjenljive strukture - SUPS (eng. *Variable Structure System*). Takvi sistemi definišu se skupom upravljačkih zakona i pravilom odlučivanja koja, na osnovu trenutnog stanja sistema, biraju odgovarajući zakon upravljanja. Unutar ove paradigme, upravljanje na bazi kliznih režima - KR (eng. *Sliding Mode Control* - SMC) zahtijeva da se regulator projektuje tako da stanje sistema dovede na željenu kliznu površ ili u njenu ograničenu okolinu, te klizanjem dođe u ravnotežno stanje. Ovim kretanjem se ostvaruje željena dinamika i robusnost sistema.

Opisani pristup nudi više ključnih prednosti. Prvo, odgovarajućim izborom klizne promjenljive, kojom se definiše klizna površ, moguće je oblikovati dinamičko ponašanje sistema sa zatvorenom povratnom spregom. Drugo, u KR odziv postaje neosjetljiv na široku klasu odstupanja u parametrima modela objekta i djelovanja vanjskih poremećaja, što obezbjeđuje inherentnu robusnost. Treće, analiza brzine i frekvencije promjene upravljačkog zakona omogućava modeliranje realnih efekata i procjenu mjera potrebnih za približavanje idealnim performansama uz istovremeno minimiziranje oscilacija (vibracija) u sistemu, kao posljedica prekidnog upravljanja i nemodelirane dinamike, koje se nazivaju treperenje (eng. *Chattering*).

Koncept sistema upravljanja promjenljive strukture potekao je iz sovjetske škole automatike 1960-tih godina i danas predstavlja široko primijenjenu metodologiju robusnog upravljanja sistemima i estimacije poremećaja i stanja sistema. Uloga akademikinja dr. B. Peruničić-Draženović, profesorice Elektrotehničkog fakulteta

Univerziteta u Sarajevu, u razvoju i afirmaciji SUPS i širem prihvatanju KR kao naučne oblasti, inicirana je objavom naučnog rada *The invariance conditions in variable structure systems* u časopisu AUTOMATICA, časopisu Međunarodne federacije za automatsko upravljanje (IFAC) kojeg izdaje ELSEVIER, 1969. godine. Kroz svoj akademski i životni put pažnju je uglavnom posvetila razvoju KR. Ova monografija posvećena je uspomeni na njen naučni trag i pedagoški uticaj, na snažan podsticaj razvoju KR u vremenski kontinualnom, ali i u vremenski diskretnom domenu. Stoga, monografija je strukturirana kao naučni omaž njenom radu i saradnji s autorima.

Monografija je podijeljena u tri dijela. Prvi dio daje historijski pregled razvoja i osnovnih koncepata SUPS, gdje su dati osnovni pojmovi i principi. Drugi dio se bavi KR u kontinualom domenu. Obrađuju se KR prvog reda, ekvivalentno upravljanje, robusnost sistema u KR, KR drugog i višeg reda, te opserveri zasnovani na KR. Treći dio posvećen je KR u vremenski diskretnim sistemima. Razmatraju se diskretni zakoni dosezanja, diskretno ekvivalentno upravljanje, kao i diskretni KR drugog i višeg reda, uz teme estimacije poremećaja i procjene stanja sistema u diskretnom vremenu. Posebna pažnja poklanja se implementaciji na digitalnim platformama: diskretizaciji, kašnjenju, izboru perioda uzorkovanja, strategija upravljanja primjenom više perioda uzorkovanja (*multirate* strategija) i problemima s ograničenjem upravljanja. Monografija naslovljena "Od kontinualne invarijantnosti do diskretne robusnosti" omogućava čitaocu da od temeljnih pojmova i historijskog konteksta, napreduje ka metodama i dokazima u kontinualnom domenu, te specifičnostima diskretne implementacije. Dijelovi monografije zasnovani su na rezultatima prethodno objavljenih naučnih radova autora, koji su uključeni uz poštivanje autorskih prava i uz saglasnost izdavača.

Posebnu zahvalnost autori duguju recenzentima na konstruktivnim komentarima koji su unaprijedili jasnoću i dosljednost teksta. Njihove sugestije su pažljivo razmotrene i u najvećoj mjeri uvažene prilikom završne dorade.

U pisanju teksta mogući su propusti, od tehničkih do gramatičkih. Autori sa zahvalnošću primaju sve primjedbe i sugestije koje će razmotriti sa ciljem poboljšanja budućih izdanja.

Izvod iz biografije

akademkinje dr. Branislave Peruničić-Draženović

Rođena u Pančevu, u porodici prosvjetnih radnika. Osnovnu školu je završila u Beogradu, gimnaziju u Kraljevu, a diplomatske i magistarske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu (1960 i 1965). Od diplomiranja živi u Sarajevu i radi na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu od njegovog osnivanja. Pored rada na Elektrotehničkom fakultetu bila je naučni saradnik instituta IRCA i IRIS u Energo-investu. Kao gostujući profesor i naučnik boravila je na nekoliko univerziteta u SAD.



15.09.1936. - 17.03.2025.

Od 1966. godine je na studijskom usavršavanju u Institutu za probleme upravljanja Akademije nauka SSSR, u Moskvi, gdje je 1968. godine odbranila tezu kandidata nauka iz oblasti upravljanja sistemima promjenljive strukture s kliznim režimom. Kao prvi doktorant iz oblasti automatike, doktorirala je 1971. godine na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu na temu *Multivarijabilni sistemi s promjenljivom strukturom*.

U okviru svoje kandidatske teze i doktorske disertacije akademkinja B. Peruničić-Draženović dala je veoma značajne doprinose teoriji sistema upravljanja promjenljive strukture s kliznim režimima. O tome u monografiji *Teorija sistema s promjenljivom strukturom* (HAYKA, 1970). godine čiji su autori prof. S. Jemeljanov i članovi njegovog tima, a najpoznatiji među njima prof. V. Utkin svjedoče dva citata:

"Principijelna mogućnost dobijanja nezavisnosti kretanja sistema s promjenljivom strukturom od spoljašnjih poremećaja, koji se karakterišu nestacionarnim vektorom, koji leži u potprostoru R_E , prvi put je uočen od strane jugoslovenskog naučnika B. Draženović." (str. 250.)

"Interesantan način stabilizacije aperiodično nestabilnih objekata pomoću SUPS s vektorskim upravljanjem predložila je B. Draženović." (str. 259.)

Prvi citat se odnosi na veoma značajan rezultat uslovi invarijantnosti SUPS s KR, a u svijetu poznat kao *Matching Conditions*. Ovaj rezultat je postao poznat široj naučnoj javnosti nakon publikovanja u časopisu AUTOMATICA [5]. Podsticaj da objavi ovaj rezultat akademkinja B. Peruničić-Draženović je dobila od prof. P. Kokotovića. Drugi rezultat pomenut u citatu govori o pionirskoj ulozi akademkinje B. Peruničić-Draženović u razvoju teorije multivarijabilnih sistema upravljanja promjenljive strukture.

Do druge polovine šesdesetih godina XX stoljeća, istraživanja u oblasti kliznih režima su se odvijala na sistemima sa skalarnim upravljanjem. U naučnom radu *Vadim I. Utkin and Sliding Mode Control* (JOURNAL OF THE FRANKLIN INSTITUTE, 2023) autori A. Poznjak and Y. Orlov navode:

"Prekidnost upravljanja u KR obezbjeđuje neke osobine robusnosti za sistem u zatvorenoj petlji, kao što je invarijantnost u odnosu na podudarne perturbacije prema prof. B. Draženović [5], koja je bila jedan od saradnika prof. V. Utkin u razvoju multivarijabilnih sistema s kliznim režimima."

Osim spomenutih rezultata, akademkinja B. Peruničić-Draženović je jedan od koautora metode ekvivalentnog upravljanja, što se gotovo i ne pominje u naučnim publikacijama, osim u jednom naučnom radu prof. V. Utkina, za čije se ime vezuje ova metoda. Na osnovu hronologije publikacija na tu temu, nedvosmisleno se može ustanoviti da je osnovne postavke metode dala akademkinja B. Peruničić-Draženović u okviru svoje kandidatske teze pod mentorstvom prof. V. Utkina, a da je prof. V. Utkin tu metodu, koristeći rezultate Filipova [83] u rješavanju problema diferencijalnih jednačina s prekidnom desnom stranom, metodu ekvivalentnog upravljanja dodatno matematički razvio do nivoa osnovne metode za analizu i sintezu SUPS. Prve rezultate je prof. V. Utkin objavio u naučnom radu *Klizni režimi u sistemima sa promjenljivom strukturom* (AUTOMATIKA - TEORETSKI PRILOG, 1970).

Nemirni istraživački duh i splet životnih okolnosti, akademkinju B. Peruničić-Draženović tokom rada odvodi u oblasti analize signala, elektroenergetike i telekomunikacija, gdje daje značajan doprinos. Zbog ove okupiranosti dugo vremena nije aktivno radila u području SUPS, ali na nagovor prof. Č. Milosavljevića ponovo se vraća u područje kliznih režima. Poslije njenog povratka iz SAD i odlaska na

8th INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS održan 2004. godine u Barseloni ponovo postaje aktivni učesnik u oblasti SPUS. Njen povratak u oblast SUPS je zajedno s autorima ove monografije intenzivno obilježila nizom publikovanih radova na nacionalnim i internacionalnim konferencijama, te u eminentnim međunarodnim časopisima. Inicijator je i autor tri značajna rezultata koja upotpunjuju sadržaj monografije:

- opšta metoda sinteze kliznog potprostora u linearnim vremenski invarijantnim sistemima koja obuhvata kako kontinualne tako i diskretne KR kako prvog tako i punog višeg reda [56].
- estimacija poremećaja u diskretnim sistemima s KR na osnovu klizne promjenljive [72].
- dekompozicija multivarijabilnog, linearnog vremenski invarijantnog sistema na nezavisne podsisteme promjenljive strukture s KR bilo kojeg reda [68].

Na *GoogleScholar* ima evidentirane 114 reference s indeksom citiranosti od 3381, a njen najpoznatiji naučni rad [5] citiran je 1364 puta.

Akademkinja B. Peruničić-Draženović pored naučno-istraživačkog rada bila je aktivna i u nastavnom i organizacionom radu, te društvenom životu. Tokom svog akademskog rada, izvela je 14 doktora nauka među kojima su i autori monografije. Krasile su je osobine kolegijalnosti i spremnosti da pomogne svojim znanjem i iskustvom. U ovom kratkom osvrtu akcenat je stavljen na njen doprinos oblasti koja je predmet ove knjige. O njenoj djelatnosti izvan tog okvira može se vidjeti u publikacijama ANUBiH, Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, te na mnogim internet platformama.

★ ★ ★ ★ ★

Sadržaj

I	Sistemi upravljanja promjenljive strukture (SUPS)	1
1.	Razvoj SUPS u kontinualnom vremenskom domenu	3
2.	Razvoj SUPS u diskretnom vremenskom domenu	7
3.	Koncept SUPS	13
II	Kontinualni klizni režimi u SUPS	19
4.	Klizni režimi u SUPS	21
4.1.	Pojam KR i SUPS	21
4.1.1.	Metod Filipova	24
4.1.2.	Metod ekvivalentnog upravljanja	25
4.2.	Uslovi dosezanja i održanja KR	26
4.3.	Projektovanje regulatora zasnovanog na KR	31
4.3.1.	Projektovanje klizne površi	31
4.3.2.	Zakoni dosezanja KR	33
5.	Invarijantnost sistema na poremećaje u KR	41
5.1.	KR u sistemima s poremećajima kroz kanal upravljanja	41
5.2.	KR u sistemima s poremećajima van kanala upravljanja	45
5.2.1.	Projektovanje klizne površi u slučaju poremećaja van kanala upravljanja	46
5.2.2.	Projektovanje integralne klizne površi u slučaju poremećaja van kanala upravljanja	64
5.2.3.	Projektovanje optimalne integralne klizne površi	67
5.2.4.	Primjenjivost za vremenski promjenljive poremećaje	69

6. Klizni režimi višeg reda	77
6.1. KR drugog reda	77
6.1.1. <i>Twisting</i> regulator	80
6.1.2. <i>Super-twisting</i> regulator	82
6.2. KR proizvoljnog reda	86
6.2.1. KRVR u linearnim sistemima s jednim ulazom	87
6.2.2. KRVR u linearnim sistemima s više ulaza	95
7. Opserveri na bazi KR	117
7.1. Luenbergerov opserver	118
7.2. Utkinov opserver na bazi KR	122
7.3. <i>Super-twisting</i> opserver	127
7.4. Linearni aktivni eliminator poremećaja	130
III Diskretni klizni režimi u SUPS	137
8. Projektovanje regulatora zasnovanog na diskretnom KR	139
8.1. Formulacija problema	140
8.2. KR i kvazi-KR u diskretnim sistemima	145
8.3. Uslovi stabilnosti diskretnog KR	146
8.4. Uslovi privlačnosti $g(\mathbf{x})$ u vremenski diskretnom domenu	148
8.5. Prikaz metoda upravljanja zasnovanih na diskretnim KR	150
8.6. Detaljna analiza Golovog algoritma	162
8.7. Diskretni KR u prisustvu poremećaja	167
8.8. Diskretni integralni KR	173
9. Metode estimacije poremećaja	177
9.1. Luenbergerov opserver poremećaja	179
9.2. Estimator na osnovu nominalnog modela objekta	183
9.3. Linearni aktivni eliminator poremećaja sistema	187
9.4. Estimacija poremećaja na osnovu klizne promjenljive	192
9.5. Aktivni estimator poremećaja	200

10.Diskretni KR u linearnim sistemima s više ulaza	203
10.1. Realizacija upravljanja s konačnim vremenom smirivanja primjenom KRVR	207
10.1.1. Kompenzacija poremećaja korištenjem nominalnog modela sistema	210
10.1.2. Kompenzacija poremećaja korištenjem STA	215
10.2. Robusno upravljanje u KR proizvoljnog reda	218
10.2.1. Projektovanje kompenzacionog upravljanja	220

Popis skraćenica

A/D	Analogno-digitalna konverzija
D/A	Digitalno-analogna konverzija
KR	Klizni režim
KRVR	Klizni režim višeg reda
LADR	Linearni aktivni eliminator poremećaja
LTI	Linearni vremenski invarijantni sistem
MI	Sistem s više ulaza
SI	Sistem s jednim ulazom
SUPS	Sistem upravljanja promjenljive strukture
STA	<i>Super-twisting</i> algoritam
STO	<i>Super-twisting</i> opserver
PI	Proporcionalno-integralni regulator

Dio I

Sistemi upravljanja promjenljive strukture (SUPS)

Ovaj dio daje kratki historijski i teorijski razvoj SUPS u kontinualnom i diskretnom vremenskom domenu, od ranih radova i ključnih ideja koje su dovele do današnjih robustnih regulatora. Posebno je istaknuta sarajevska škola kliznih režima i njen doprinos u razvoju. Uveden je pojam SUPS, te se objašnjava kako se iz SUPS prirodno dobija KR kao posebna dinamika sistema kada se trajektorija dovede na unaprijed zadanu kliznu površ i na njoj zadrži. Na kraju se kroz jedan primjer sistema intuitivno objašnjava SUPS poređenjem s klasičnim linearnim regulatorom po stanjima, gdje se pokazuje kako SUPS može poboljšati ponašanje sistema i obezbijediti željene osobine trajektorije sistema.

1. Razvoj SUPS u kontinualnom vremenskom domenu

SUPS, koje je uveo prof. S. Jemeljanov sredinom 1950-ih godina u Rusiji [1] i dalje razvijao sa svojim saradnicima u Institutu za automatiku Akademije nauka SSSR postali su važna klasa robusnih sistema upravljanja. Takođe, grupa istraživača okupljena oko prof. E. Barbašina u Jekaterinburgu (tadašnji Sverdlovsk) je radila na rješavanju problema SUPS [2]. Ono što je jako važno jeste da je kod ovakvih sistema uočen poseban oblik kretanja sistema po željenoj trajektoriji koje je nazvan klizni režim - KR (eng. Sliding Mode - SM). Danas je to poznata nelinearna metoda upravljanja koja mijenja dinamiku nelinearnog sistema primjenom prekidnog upravljačkog signala koji tjera sistem da „kliže“ duž presjeka posebno izabranih kliznih funkcija (površina). Pored S. Jemeljanova i E. Barbašina, A. Filipov, V. Utkin i B. Peruničić-Draženović su dali značajan doprinos početnom razvoju SUPS [1–5]. Radili su na problemima stabilnosti, osjetljivosti i robusnosti SUPS, a njihovi rezultati su imali izuzetan uticaj na daljnji razvoj upravljanja na bazi KR.

Krajem šestdesetih godina prošlog stoljeća, profesori S. Zimonjić, Z. Pašić i B. Matić s Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu zajedno s prof. B. Peruničić-Draženović uzimaju aktivno učešće u rješavanju problema SUPS. Imenovani su u istraživačkoj grupi prof. S. Jemeljanova, u Moskvi, radili na problemu stabilnosti, osjetljivosti i osobinama SUPS u generalizovanom prostoru stanja. Kao rezultat zajedničkih istraživanja razvijen je sistem automatskog upravljanja tehnološkim procesima baziran na SUPS čija praktična realizacija je izvedena u sarajevskom Energoinvestu. Ovo prožimanje teorije i prakse kroz zajedničko djelovanje obrazovnih, istraživačkih i proizvodnih institucija u godinama koje slijede dovodi do onoga što je poznato kao sarajevska škola automatike [6].

Širenje teorijskog istraživanja SUPS i KR pokrenuli su naučni radovi [5, 7, 8]. U naučnom radu prof. B. Peruničić-Draženović [5] prvi put su formulisani uslovi invarijantnosti (eng. *Matching Conditions*) na poremećaje kod SUPS u KR rada. To je ujedno i prvi naučni rad objavljen iz oblasti KR na engleskom jeziku. U radu se prvi put primjenjuje metoda usrednjenog upravljanja, kasnije preformulisana kao metoda ekvivalentnog upravljanja (eng. *Equivalent Control*) od strane prof. V. Utkina [7, 8]. Prof. V. Utkinu se može pripisati što danas ova metoda predstavlja jedan od osnovnih pristupa u analizi i sintezi SUPS. U naučnim radovima [7, 8], detaljno su obrađene primjene metode Filipova i stabilnosti po Ljapunovu na probleme SUPS u KR, kao i procedure projektovanja primjenom regularnog oblika matematičkog modela dinamičkog sistema. Definisani su koncept ekvivalentnog upravljanja i uslov invarijantnosti, umjesto usrednjenog upravljanja, kao i princip invarijantnosti uveden u pionirskom radu [5].

Klizno upravljanje treba da vodi stanje sistema ka unaprijed definisanom kliznom potprostoru u konačnom vremenu, počevši od proizvoljnog početnog stanja. Stoga, otvorena su dva glavna pitanja u sintezi upravljanja kod sistema s KR: kako pronaći potprostor da se postigne željeno klizno kretanje i kako projektovati upravljački sistem koji garantuje dosezanje kliznog potprostora i postojanje KR. Očigledno, zakon upravljanja ima dva dijela: dio za dosezanje kliznog potprostora, izabran kao prekidna funkcija, čiji je zadatak da dosegne klizni potprostor G i dio, koji ograničava kretanje sistema duž kliznog potprostora G . Glavne prednosti KR su: kompenzacija ograničenih poremećaja, redukcija reda dinamike sistema i konvergencija u konačnom vremenu ka kliznom potprostoru. Pored ovih prednosti, postoje i nedostaci, od kojih je najznačajniji fenomen treperenja (eng. *chattering*). Kada teorija Ljapunova nije bila široko poznata, postojali su problemi s analizom stabilnosti sistema i rješavanjem diferencijalnih jednačina s prekidnom desnom stranom koje opisuju dinamiku sistema u KR.

Tokom 80-tih godina XX stoljeća, saradnja ruskih i sarajevskih istraživača je nastavljena, tako da je kao drugi značajan rezultat saradnje bio sistem za upravljanje brzinom trofaznog asinhronog kaveznog motora zasnovan na SUPS s KR, predložen u disertaciji prof. A. Šabanovića. Glavni rezultati disertacije su objavljeni u naučnom radu [9], koji je skrenuo pažnju istraživača u oblasti primjene energetske elektronike i KR u upravljanju trofaznim električnim mašinama. Nadalje su nastavljena istraživanja primjene KR u upravljanju robotskim manipulatorima, statičkim pretvaračima, te adaptivnim sistemima [10–12].

Interesantno je napomenuti da su sarajevski istraživači, koristeći stečena znanja iz KR, radili na razvoju sistema upravljanja invertorski pogonjenim asinhronim mašinama u tramvajima. Stečena znanja i postignuti rezultati su iskorišteni u doktorskim disertacijama kandidata M. Vujovića, F. Bilalovića, O. Mušića, N. Šabanović-Behlilović i N. Hadžimejlića koje su uspješno odbranjene na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. Akademkinja B. Peruničić-Draženović je dala svoj direktan doprinos kroz mentorski rad ili učešće u komisijama za odbranu pobrojanih doktorskih disertacija.

U početnoj fazi istraživanja KR razmatrani su sistemi n -tog reda s jednim ulazom (eng. *Single Input* - SI) [1–4], odnosno sa skalarnim upravljanjem. Klizni potprostor G definisan je kao $g = 0$ u kanonskom prostoru stanja, gdje je g klizna promjenljiva koja zavisi od stanja sistema i njihovih izvoda do $(n - 1)$ -tog reda. Sinteza kliznog upravljanja za sistem s više ulaza (eng. *Multiple Input* - MI), odnosno s vektorskim upravljanjem, prvi put je opisan u pionirskom radu [5]. Očigledno, klizna površ G za sisteme s više ulaza definisana je s $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), gdje je m broj upravljačkih ulaza, a $\mathbf{x}$ je vektor stanja. Tada upravljanje zavisi od vektora stanja $\mathbf{x}$, a kretanje u KR opisuje dinamika $(n - m)$ -tog reda. Ako prvi izvod klizne promjenljive g eksplicitno zavisi od upravljačkog ulaza, tada klizna promjenljiva g ima relativni red $r = 1$ u odnosu na upravljački ulaz. Pošto svaki upravljački ulaz smanjuje red dinamike KR za jedan, takav tip kliznog upravljanja se ponekad naziva upravljanje KR prvog reda ili konvencionalni KR.

Sinteza kliznog upravljanja s kliznim funkcijama g_i s relativnim redom $r > 1$ poznata je kao upravljanje KR višeg reda - KRVR (eng. *High-order Sliding Mode Control* - HOSMC) [13]. U ovom slučaju, red dinamike KR može biti smanjen za više od broja ulaza. Za sisteme sa skalarnim upravljanjem, razvijen je regulator koji smanjuje red dinamike KR za više od jedan, dok su predstavljeni i regulatori s proizvoljnim redom KR s konvergencijom u konačnom vremenu [14–17]. Kao poseban slučaj, KR drugog reda poznat kao *super-twisting* algoritam - STA, obrađen je u mnogim radovima [14–18]. Dokazano je da sinteza KRVR pomaže u ublažavanju efekta treperenja i pruža veću preciznost u realnim aplikacijama. U naučnom radu [19], prof. V. Utkin je dokazao da u sistemu sa STA postoji pravi KR drugog reda, dok se u svim drugim slučajevima teorija upravljanja može svesti na klasične KR prvog reda.

U posljednjim godinama, svi pristupi sintezi upravljanja s KRVR koriste osobinu homogenosti [20–22]. Na taj način, projektovanje sistema i analiza robusnosti, preciznosti i konvergencije KRVR postaju mnogo jednostavniji. Primjena KRVR na sisteme s vektorskim upravljanjem rijetko je razmatrana [23–25]. Umjesto dinamike sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi, razmatra se samo dinamika izabranih izlaza. Treba naglasiti da KRVR s prekidnim upravljanjem može takođe eliminisati poremećaje koji djeluju kroz kanal upravljanja. Upravljanje KRVR reda za linearne sisteme sa skalarnim upravljanjem s vremenski nepromjenljivim parametrima (eng. *Linear Time Invariant* - LTI), koristeći model prostora stanja, prvi je opisan u naučnom radu [26]. Pokazano je da jednačina željene dinamike q -tog reda KR ima $(n - q)$ -ti red u sistemima. Ovaj regulator zahtijeva upotrebu diferencijatora izabranog izlaza. Izlaz je izabran tako da dinamika KR može imati proizvoljne stabilne polove. U naučnim radovima [27, 28], predložena je sinteza KRVR za LTI sisteme. Klizne promjenljive su izabrane tako da relativni red kliznih funkcija bude jednak indeksima kontrolabilnosti. Stoga KR ima red jednak nuli, i dobija se upravljanje u konačnom vremenu.

Uprkos dobrim karakteristikama, sinteza kliznog upravljanja u kontinualnom vremenu ima i svoje nedostatke u digitalnoj implementaciji. Teoretski, frekvencija prekidanja kod KR u kontinualnom vremenskom domenu je beskonačna. Primjena digitalnih hardverskih struktura u sistemima automatskog upravljanja usmjerila je istraživanje ka digitalnim KR (eng. *Discrete-Time Sliding Mode Control*) čiji razvoj je prezentiran u sljedećem poglavlju.

★ ★ ★ ★ ★

2. Razvoj SUPS u diskretnom vremenskom domenu

Razvoj diskretnih KR u SUPS započeo je krajem sedamdesetih godina XX vijeka. Iako su neka istraživanja bila provedena i ranije, najznačajniji iskorak u ovom pravcu inicirao je akademik dr. B. Matić, profesor Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu [6]. Prvi radovi su se odnosili na dosezanje i održanje diskretnog KR u okolini klizne prave kod dinamičkih sistema drugog reda, a zatim i sistema višeg reda, kao i drugih osobina i efekata u sistemima s diskretnim KR [29–31]. Nesebičnu pomoć kod rada na navedenim problemima pružila je akademikinja B. Peruničić-Draženović. Esencijalni rezultati istraživanja publikovani su u [32], časopisu *Automatika i telemekhanika Akademije nauka SSSR*, koji se prevodi na engleski jezik pod nazivom *Automatic and Remote Control*. Ta istraživanja su se odnosila na diskretnu realizaciju algoritama kontinualnih SUPS s KR iz prve faze istraživanja grupe prof. S. Jemeljanova. Predloženi algoritmi se mogu podvesti pod klasu kvazi-relejnih algoritama upravljanja u kojima intenzitet prekidnog upravljanja opada s približavanjem stanju ravnoteže sistema. Najznačajniji rezultat [32] je definicija potrebnih uslova nastanka kvazi KR (ovaj termin je prvi put uveden umjesto cik-cak režima kretanja karakterističnog za diskretne KR) u diskretnim SUPS. Potrebni uslovi dosezanja kvazi KR u diskretnom domenu su dati i u [33]. Slična istraživanja su objavljena u naučnim radovima [34, 35], a dovoljni uslovi stabilnosti diskretnih KR definisani su u naučnim radovima [36–39].

U tom periodu odvijaju se istraživanja diskretnih KR karakterističnih za drugu etapu razvoja SUPS s KR, a koja se zasniva na metodi ekvivalentnog upravljanja, koju je, za kontinualne sisteme, predložila akademikinja dr. B. Peruničić-Draženović koje je publikovala u [5] i disertaciji [40]. Profesor V. Utkin je metodu ekvivalentnog upravljanja dalje usavršio [41]. Prvi rezultati s ekvivalentnim upravljanjem za diskretne sisteme ostvareni su 1985. godine u okviru disertacija [42, 43], pri čemu su rezultati [42] značajniji u teorijskom pogledu, ali nisu blagovremeno

publikovani u nekom značajnijem časopisu ili međunarodnoj konferenciji. Mnogo kasnije se pojavljuje publikacija [44], u kojoj se publikuju rezultati disertacije [42]. Osnovni rezultat ovih disertacija je formiranje idealnih diskretnih KR. U njima, stanje sistema, za konačno vrijeme, doseže kliznu površ i ostaje na njoj, u trenucima uzorkovanja, u nominalnom sistemu, a upravljanje dosezanja i klizanja je jedinstveno i identično ekvivalentnom diskretnom upravljanju. Ovo je bitna razlika u odnosu na kontinualne sisteme, gdje ekvivalentno upravljanje samostalno ne obezbjeđuje dosezanje i klizanje, već zahtijeva primjenu komponente prekidnog upravljanja.

Ubrzo nakon 1985. godine, u časopisu *Automatica* prijavljen je naučni rad autora M.E. Magana i S.H. Žak s Purdue University (SAD), koji je imao slične rezultate kao [42]. Navedeni naučni rad nije prošao strogu recenziju časopisa, ali autori imaju publikaciju [45]. 1989. godine publikovan je naučni rad [46], u kome se prvi put u široj naučnoj javnosti, promovise diskretno ekvivalentno upravljanje. Metodu su dalje razvijali S.V. Drakunov i saradnici [47–49]. U ovim radovima se razmatra problem tačnosti, odnosno širine pograničnog sloja kvazi KR, te uvodi estimator poremećaja na osnovu nominalnog diskretnog modela objekta upravljanja pod nazivom estimator poremećaja s jednim periodom kašnjenja (eng. *One step delayed disturbance estimator*). Na osnovu ovih radova, metoda ekvivalentnog upravljanja, u diskretnim KR, je postala dominantna. Ipak, jedan nedostatak ove metode je značajan, a to je preveliko početno upravljanje, naročito za male periode uzorkovanja. Taj problem je riješio kineski naučnik Gao, W. [50] uvodeći upravljanu dinamiku kretanja i u režimu dosezanja klizanja. To je nazvao metoda zakona dosezanja (eng. *Reaching-law method*). Pored kontrole dinamike dosezanja KR, što je ranije promovisano za kontinualne sisteme u [51], klizanje se organizuje tako da se sistem prisiljava da, u svakom periodu uzorkovanja, mora presijecati kliznu površ. Na taj način nastaje determinisani cik-cak režim kretanja oko klizne površi s unaprijed definisanim sektorom kvazi KR.

Problem prevelikog početnog upravljanja kod metode bazirane na ekvivalentnom upravljanju se može riješiti jednostavnim umetanjem nelinearnog elementa tipa zasićenja (saturacije ili limitera) između diskretnog regulatora i objekta upravljanja, što je pokazano u naučnom radu [52]. Na ovaj način se samo produžava vrijeme dosezanja. U toku ograničenja objekat je bez povratne sprege, koja se uspostavlja čim sistem uđe u linearnu zonu. Nedostatak ovog pristupa je u nemogućnosti primjene na nestabilne objekte.

U naučnom radu prof. A. Bartoševića [53], baziranom na Gaovom zakonu dosezanja, predložena je funkcija kojom se određuje upravljanje dosezanja na osnovu početnih uslova klizne promjenljive i željenog broja perioda uzorkovanja za dosezanje klizanja. Osim toga, ne zahtijeva se strogo presijecanje klizne površi, u svakom periodu uzorkovanja. Predloženo je sužavanje kvazi klizne oblasti korištenjem sume razlike uzoraka stvarne i željene pozicije klizne promjenljive, što je u stvari djelovanje po integralu greške između stvarne i željene vrijednosti klizne promjenljive. Po svojim osobinama koje postiže, ova metoda je bliža metodama baziranim na ekvivalentnom upravljanju. Sljedeći karakterističan pristup pripada diskretnim sistemima upravljanja s kliznim sektorom [54] koji nisu naišli na širu primjenu u praksi.

Prethodno su navedeni radovi koji su vremenski kontinualni matematički model objekta upravljanja prevodili u diskretni, primjenom z-transformacije korištenjem kola zadržke nultog reda (eng. *Zero-order-hold*) i tzv. šift modela. Drugi način diskretizacije je primjena Ojlerove aproksimacije diferencijala odnosno δ -model objekta. Takav pristup za sintezu diskretnih KR je prvi put dat u [55]. U osnovi, to je drugi oblik projektovanja baziranog na ekvivalentnom upravljanju, ali je jedinstveno diskretno ekvivalentno upravljanje iz šift modela u δ -modelu razdvojio na dvije komponente: na komponentu δ -ekvivalentnog upravljanja i komponentu dosezanja koja je proporcionalna kliznoj promjenljivoj u δ -domenu podijeljenoj s periodom uzorkovanja. Time se na očigledan način objašnjava osobina diskretnog ekvivalentnog upravljanja da je istovremeno i upravljanje dosezanja i ekvivalentno upravljanje kao i pojava prevelikog upravljanja dosezanja. U tom radu je dat i postupak određivanja parametara klizne promjenljive na osnovu željenog spektra polova. U algoritmu upravljanja je uključeno ograničenje na upravljanje, koje nije tipa limitera. Efikasniji način sinteze klizne promjenljive na osnovu željenog spektra polova kako za kontinualne, tako i za diskretne sisteme, sa skalarnim ili s vektorskim upravljanjem, predložen je u [56] što je generalizacija metode [57].

Na osnovu početnih istraživanja diskretnih KR, diskretizacijom kontinualnih algoritama, zaključeno je da taj pristup ne daje dobre rezultate, jer se u sistemu javlja prekidno upravljanje velike amplitude zbog kašnjenja usljed diskretizacije. S tim u vezi, ponikla je ideja prevođenja kontinualnih algoritama u diskretne bez neželjenih treperenja. Prvi naučni rad na tu temu je [46], gdje se koristi implicitna realizacija *signum* funkcije. Ta ideja je dalje razrađena u potpunosti, u zatvorenom obliku, za sisteme sa skalarnim upravljanjem u [55]. Drugačiji pristup

rješavanju tog problema iniciran je u [58] na osnovu koga je nastala svojevrsna francuska škola implicitne diskretizacije SUPS s kretanjem u KR.

Drugi smjer u pravcu smanjenja neželjenih treperenja je primjena KRVR, koji su izvorno nastali u kontinualnom domenu, ali su te ideje proširene i na diskretne KR. Prema mišljenju prof. V. Utkina, KRVR samo su jedan specifičan oblik tradicionalnih KR prvog reda, jedino se kod STA stvarno ostvaruje KR drugog reda. STA je veoma efikasan u kompenzaciji poremećaja i minimizaciji neželjenih oscilacija. Zbog toga je postao predmet izučavanja i u diskretnom domenu [59–63]. Efikasnost STA u kompenzaciji poremećaja leži u činjenici da se u njemu upravljanje formira i uz pomoć integrala klizne promjenljive. Primjena integralnog djelovanja u sistemima promjenljive strukture može se ostvariti dodavanjem PI zakona upravljanja. Posebna klasa sistema pod nazivom integralni KR je najprije uvedena u kontinualnom domenu [64], a zatim je proširena i na diskretne KR [65].

U najvećem broju publikacija tretirani su uglavnom sistemi sa skalarnim upravljanjem. Kada se radi o vektorskom upravljanju s istim brojem upravljačkih signala i izlaza, u klasi diskretnih sistema s KR za LTI sisteme neki rezultati su dati u [66–68]. Predloženi pristup vrši raspredznanje viševarijabilnog sistema na podsisteme s jednim ulazom i jednim izlazom, čime se projektovanje svodi na sintezu sistema sa skalarnim upravljanjem.

Osnovni nedostatak sistema upravljanja s diskretnim KR u odnosu na kontinualne je gubitak osobine invarijantnosti – osobine koja odlikuje kontinualne KR. Taj gubitak je posljedica diskretnog upravljanja i kontinualnih poremećaja u istom dinamičkom sistemu. Ipak, i pored gubitka invarijantnosti, diskretni KR posjeduju osobinu robusnosti, utoliko više ukoliko period uzorkovanja teži nuli. Kako bi se poboljšala robusnost diskretnih KR, jedan od pristupa bio je procjena i kompenzacija poremećaja. U naučnom radu [48] primijenjena je procjena poremećaja s jednim korakom kašnjenja, koja je suzila kvazi klizni domen na $\mathcal{O}(T^2)$, ali je stacionarna greška za regulaciju stanja postigla tačnost reda $\mathcal{O}(T)$. Precizniji rezultati praćenja postignuti su u naučnom radu [65] primjenom diskretne integralne klizne površi, što je rezultiralo i kvazi kliznim domenom reda $\mathcal{O}(T^2)$ i tačnošću regulacije stanja. Problem robusnog projektovanja diskretnih KR veoma je atraktivan i riješen primjenom opservera ili posmatrača ili procjenjivača poremećaja [56, 66–76] ili adekvatnim izborom klizne površi za poremećaje koji se ne podudaraju s upravljanjem, odnosno koji ne ulaze preko kanala upravljanja [77].

Na kraju, mnogi radovi su posvećeni rješavanju praktičnih problema u regulaciji elektromotornih pogona [70, 71, 77–80], pretvarača energetske elektronike [80–83], avionom [66–68], logistiku i upravljanje zalihama roba [84], orijentisanim komunikacijskim mrežama [85], i drugim procesima. Za vremenski period od 45 godina, u istraživanju diskretnih KR, publikovan je veliki broj radova, a jedan mali dio je naveden u ovom uvodu koji su imali dominantan uticaj na autore ove knjige, a u nekima od njih su i direktni učesnici. Čitaoci se upućuju i na reference u gore navedenim radovima kao i na pregledne radove.

★ ★ ★ ★ ★

3. Koncept SUPS

Osnovna ideja SUPS može se jednostavno objasniti poređenjem s linearnim regulatorom po stanju za linearni sistem s jednim ulazom definisanim jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}\tag{3.1}$$

gdje su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ stanja sistema, a $u \in \mathbb{R}$ je upravljanje.

Prvo će biti analiziran linearni regulator po stanjima definisan jednačinom za upravljanje

$$u(x_1, x_2) = -k_1 x_1 - k_2 x_2,\tag{3.2}$$

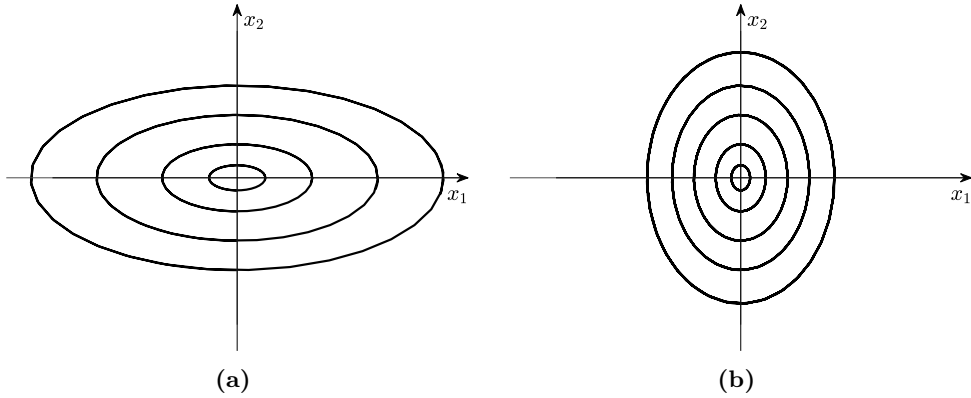
gdje su $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ konstantni parametri koji se mogu odabrati različitim postupcima projektovanja regulatora. Cilj projektovanja regulatora je da se sistem definisan jednačinama (3.1) iz bilo kojeg početnog uslova $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0)]^\top$ može dovesti u ravnotežno stanje $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ gdje $t \rightarrow \infty$. Na ovaj način sistem će biti asimptotski stabilan.

S upravljanjem (3.2) karakteristična jednačina sistema (3.1) imaće rješenja

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(k_2 \pm j \sqrt{4k_1 - k_2^2} \right).\tag{3.3}$$

Ako je $k_2 = 0$ i $k_1 > 0$ rješenja (3.3) će biti čisto imaginarna i sistem će oscilovati s frekvencijom koja zavisi od vrijednosti parametra k_1 . Sistem (3.1) s ovakvim upravljanjem ne može biti asimptotski stabilan. Na slici su prikazane trajektorije kretanja sistema (3.1) za dvije različite vrijednosti parametra pojačanja $k_1 = 0, 2$ i $k_1 = 1, 8$.

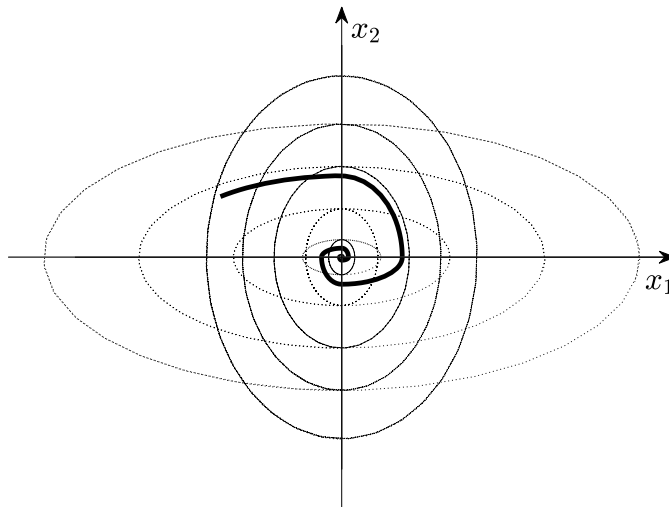
U SUPS, upravljanje je definisano skupom kontinualnih funkcija stanja uz logiku prebacivanja koja omogućava promjenu vrijednosti upravljanja na način da se u bilo kojem trenutku vrijednost prebaci s jedne na drugu funkciju iz definisanog skupa. Problem projektovanja SUPS je izbor parametara za svaku od struktura upravljanja i definisanje logike prebacivanja.



Slika 3.1. Trajektorija kretanja sistema (3.1) s upravljanjem (3.2): (a) parametar pojačanja $k_1 = 0,2$, (b) parametar pojačanja $k_1 = 1,8$

Vrlo važna osobina SUPS jeste da može generisati nove oblike kretanja sistema koja nisu svojstveni ni u jednoj od korištenih struktura upravljanja. Na primjer, asimptotski stabilan sistem može se sastojati od dvije strukture upravljanja, iako nijedna od njih nije asimptotski stabilna. Ova mogućnost je prikazan na slici 3.2 za sistem opisan jednačinom (3.1), pri čemu je upravljanje definisano relacijom

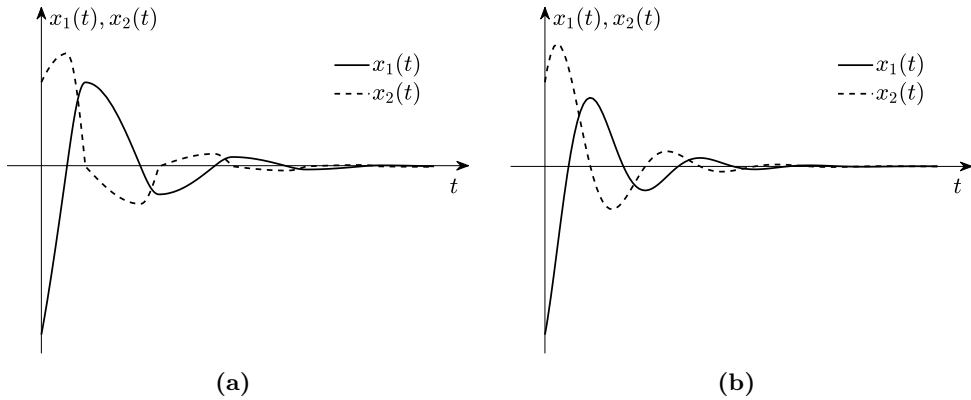
$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -0.2 x_1, & \text{ako je } x_1 x_2 < 0, \\ -1.8 x_1, & \text{ako je } x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$



Slika 3.2. Trajektorija kretanja sistema (3.1) s upravljanjem (3.4)

Trajektorija kretanja sistema prikazana na slici 3.2 je stabilna i sastoji se od dijelova elipsi prikazanih na slici 3.1 od koji nijedna nije asimptotski stabilna. Ovdje je važno naglasiti da je asimptotska stabilnost postignuta logikom prebacivanja koja mijenja strukturu sistema na koordinatnim osama. Na ovaj način je pokazana korisnost uvođenja SUPS.

U prethodno navedenom primjeru, stabilna trajektorija kretanja sistema je dobijena kombinovanjem dijelova trajektorija kretanja različitih struktura. Slična trajektorija se može dobiti ako su parametri pojačanja upravljanja (3.2) drugačije odabrani. Na slici 3.3 su prikazane vremenske promjene stanja x_1 i x_2 za slučaj kada je primijenjeno upravljanje (3.4) (slika 3.3(a)) i za slučaj kada je primijenjeno upravljanje $u(x_1, x_2) = -0,9x_1 - 0,6x_2$ (slika 3.3(b)). Prikazani odzivi su dosta slični iako vrijedi naglasiti da linearni regulator daje glatkiji odziv i realizacija mu je jednostavnija.



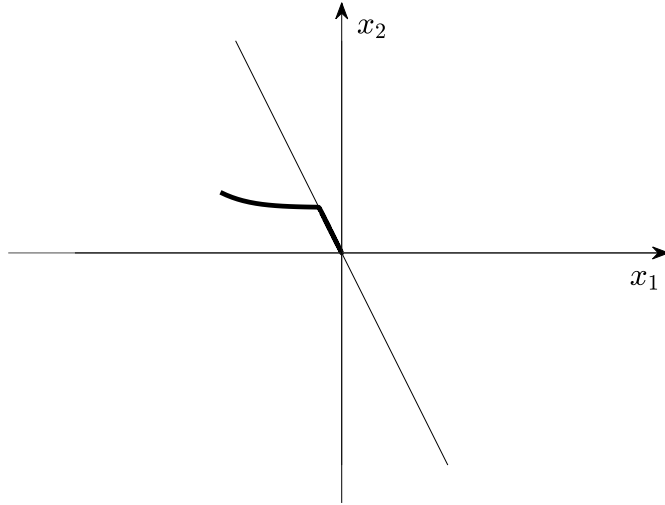
Slika 3.3. Vremenski dijagram promjene stanja sistema (3.1): (a) s upravljanjem (3.4), (b) s upravljanjem $u(x_1, x_2) = -0,9x_1 - 0,6x_2$

Sljedeći primjer će pokazati kako je moguće dobiti SUPS čija stabilna trajektorija neće odgovarati niti jednoj od korištenih struktura.

Za sistem opisan jednačinom (3.1) s upravljanjem definisanim relacijom

$$u(x_1, x_2) = -cx_2 - \alpha \operatorname{sign}(cx_1 + x_2), \quad (3.5)$$

trajektorija kretanja sistema je prikazana na slici 3.4 za $\alpha = 3$ i $c = 2$. Dobijena trajektorija je ponovo stabilna ali ovaj put ona nije svojstvena ni jednoj od trajektorija kretanja kombinovanih struktura.



Slika 3.4. Trajektorija kretanja sistema (3.1) s upravljanjem (3.5) za $\alpha = 3$ i $c = 2$

Kod trajektorije prikazane na slici 3.4 su vidljive dvije faze kretanja. Prva faza kretanja predstavlja kretanje iz početnog uslova do prave definisane s

$$g(x_1, x_2) = c x_1 + x_2 = 0 \quad (3.6)$$

po elipsi koja je svojstvena jednoj od korištenih struktura. Kretanje sistema po pravoj $g(x_1, x_2)$ koje završava u koordinatnom početku predstavlja drugu fazu kretanja i ono predstavlja novi tip kretanja koji se naziva KR koji je svojstven SUPS. Prava $g(x_1, x_2)$ po kojoj se sistem kreće u KR predstavlja kliznu pravu (eng. *Sliding Line*) ili klizne površi (eng. *Sliding Surface*) ako se radi o funkciji više promjenljivih. U skladu s ovim, prva faza kretanja sistem predstavlja fazu dosezanja (eng. *Reaching Phase*) klizne prave ili površi. Brzina dosezanja klizne prave se može podesiti izborom vrijednosti parametra α i c .

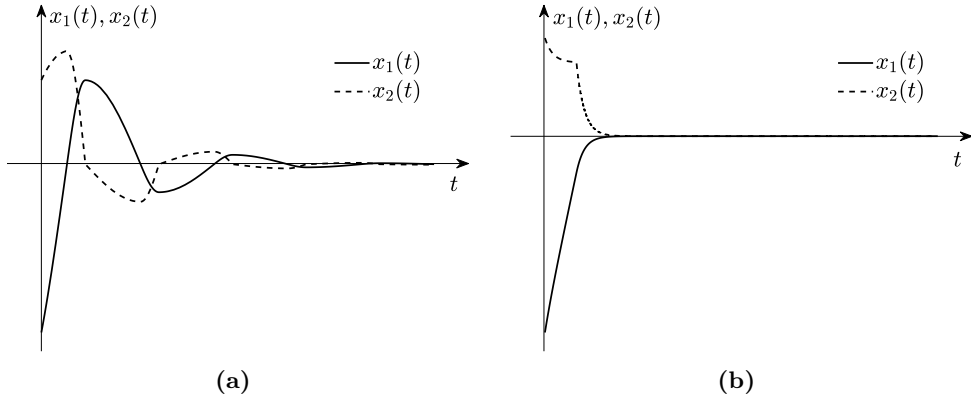
S obzirom na to da se kretanje na završnoj etapi trajektorije odvija duž klizne prave $g(x_1, x_2) = c x_1 + x_2 = 0$, kretanje sistema (3.1) će biti opisano jednačinama

$$\dot{x}_1 = x_2 = -c x_1. \quad (3.7)$$

Iako je polazni sistem drugog reda, kretanje u KR je opisano diferencijalnom jednačinom prvog reda, pa se da zaključiti da je kretanje sistema u KR opisano linearnom diferencijalnom jednačinom nižeg reda u odnosu na polazni sistem.

Takođe, iz (3.7) se vidi da trajektorija sistema (3.1) u KR ne zavisi od parametara sistema jer su osobine kretanja sistema opisane kliznom pravom. Ovo je osobina invarijantnosti sistema što predstavlja najvažniju osobinu KR jer pokazuje da za sintezu upravljanja nije neophodno tačno poznavanje parametara upravljanog sistema. Takođe, osobina invarijantnost je od izuzetne važnosti i pri upravljanju sistemima na koje djeluju poremećaji.

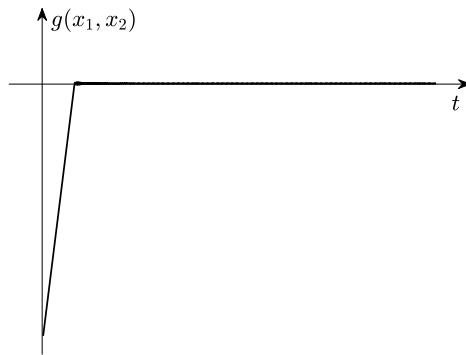
Na slici 3.5 su prikazani odzivi sistema (3.1) za dva različita upravljanja definirana relacijama (3.4) i (3.5). Upravljanje (3.4) osigurava stabilno kretanje sistema (3.1) prikazano na slici 3.5(a) koje se može okarakterisati kao prigušeni oscilatorni odziv. S druge strane, upravljanje (3.5) osigurava stabilno kretanje sistema (3.1) prikazano na slici 3.5(b) koje ima bržu prigušenu konvergenciju bez oscilacija. Na odzivima sistema se uočava tačka loma koja predstavlja dolazak sistema na kliznu pravu, odakle se sistem nastavlja asimptotski kretati ka ravnotežnom stanju.



Slika 3.5. Vremenski dijagram promjene stanja sistema (3.1): (a) s upravljanjem (3.4), (b) s upravljanjem (3.5)

Promjena klizne promjenljive $g(x_1, x_2) = cx_1 + x_2$ je prikazana na slici 3.6. Koristeći relacije (3.1), (3.5) i (3.6), promjena klizne promjenljive se može opisati jednačinom

$$\dot{g}(x_1, x_2) = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = cx_2 + u = -\alpha \text{sign}(g). \quad (3.8)$$



Slika 3.6. Vremenski dijagram promjene klizne promjenljive

Uticaj parametara c i α na stabilnost prethodno prikazanih trajektorija kretanja može biti analizirano primjenom funkcije Ljapunova u obliku

$$V = \frac{1}{2}g^2 > 0, \quad g \neq 0, \quad (3.9)$$

koja je pozitivno definitna osim za $g = 0$, gdje je jednaka nuli. zahtijevajući da prvi izvod funkcije Ljapunova bude negativno definitna funkcija dobija se uslov u obliku

$$\dot{V} = g \dot{g} = -\alpha g \operatorname{sign}(g) = -\alpha |g| < 0, \quad g \neq 0. \quad (3.10)$$

Iz posljednjeg izraza se može zaključiti da su uslovi Ljapunova zadovoljeni ako vrijedi $\alpha > 0$. Od vrijednosti parametra α zavisi brzina konvergencije trajektorije ka ravnotežnom stanju. Integraljenjem jednačine (3.10) može se odrediti vrijeme dosezanja KR koje je konačno i iznosi $\frac{|g(0)|}{\alpha}$ što je još jedna od značajnih osobina KR.

★ ★ ★ ★ ★

Dio II

Kontinualni klizni režimi u SUPS

U ovom dijelu se obrađuju klizni režimi upravljanja u kontinualnom vremenskom domenu. Najprije se uvodi pojam kliznog režima, metode dobijanja ekvivalentnog upravljanja i uslovi postojanja kliznog režima, a zatim se prikazuje projektovanje regulatora zasnovanih na kliznom režimu kroz izbor klizne površi i zakona dosezanja. Poseban fokus je dat na invarijantnosti sistema na poremećaje, pri čemu se analiziraju slučajevi poremećaja kroz kanal upravljanja i van njega, te se daju procedure projektovanja integralnih kliznih površi i njihova primjenjivost na vremenski promjenljive poremećaje. Dio se završava naprednim temama kao što su klizni režimi višeg reda i konstrukcija posmatrača/opservera zasnovanih na kliznom režimu, čime se nudi dobra osnova za praktičnu realizaciju robusnih sistema.

4. Klizni režimi u SUPS

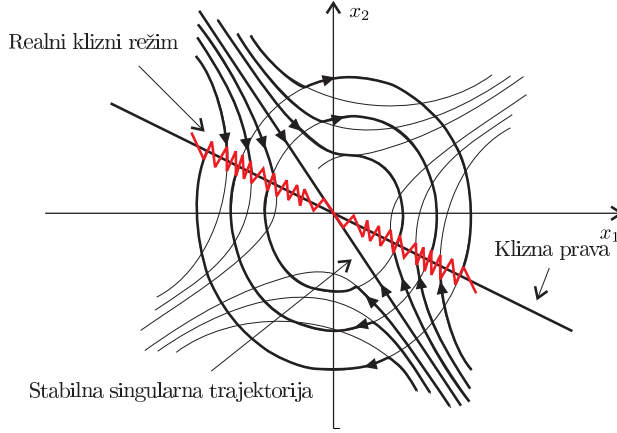
U teoriji automatskog upravljanja kao najstariji zakoni upravljanja se spominju relejni, kao klasa analognih nelinearnih sistema upravljanja s prekidnom strukturom. Prednosti ovakvih sistema su njihova jednostavnost i mogućnost upravljanja objektima bez poznavanja njihovih karakteristika. Ipak, relejni sistemi nisu našli značajniju primjenu u sistemima upravljanja zbog habanja kontakata releja usljed čestih uključenja.

Razvojem poluprovodničkih prekidača, problem habanja kontakata je eliminisan, pa su pozitivne osobine KR iskorištene kroz implementaciju SUPS. Teorijski, kada bi poluprovodnički prekidači imali idealne karakteristike (beskonačnu frekvenciju prekidanja, te nepostojanje kašnjenja i histereze), kretanje SUPS bi se odvijalo po željenoj trajektoriji kao što je to pokazano u prethodnom poglavlju i ovakav vid kretanja bi se nazivao idealni KR. U praksi beskonačna frekvencija prekidanja nije moguća, tako da sistemi koji koriste realne prekidače imaju oscilatorno kretanje u okolini željene trajektorije.

4.1. Pojam KR i SUPS

Kretanje sistema drugog reda u KR se može grafički interpretirati koristeći moguće trajektorije različitih struktura sistema što je prikazano na slici 4.1 (x_1 i x_2 su stanja sistema). Kod objašnjenja KR kao primjer koristi se upravljanje sistemom gdje se kombinuju dvije različite strukture sistema. Konkretno, na slici 4.1 je prikazana kombinacija dvije strukture sistema od kojih jedna ima trajektoriju u obliku nestabilne spirale, a druga trajektoriju u obliku sedla. Trajektorija tipa sedla ima dvije singularne trajektorije od kojih je samo jedna stabilna. Ako se organizuje kombinovanje navedene dvije strukture tako da se svako započeto kretanje završava na unaprijed definisanoj pravoj između ose x_1 i stabilne singularne trajektorije, dobit će se trajektorija sistema prikazana na slici 4.1. Uočava se da sve trajektorije padaju na jednu zajedničku pravu koja se naziva klizna prava/linija.

U sistemima trećeg i višeg n -tog reda, KR se ostvaruju na kliznoj površi. Sa slike se vidi da se kretanjem sistema u KR dobiju nove trajektorije koje nisu svojstvene ni jednoj od kombinovanih struktura sistema.



Slika 4.1. Trajektorija kretanja sistema drugog reda u KR

Koristeći prethodno definisane pojmove, biće definisane jednačine kretanja u KR za opšti sistem opisan jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t), \quad (4.1)$$

gdje je $\mathbf{x}(t) \equiv [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \equiv [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ vektor funkcija sistema, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrica funkcija, te $\mathbf{u}(t) \equiv [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^\top \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja sistemom. Pretpostavlja se da su $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ neprekidne funkcije u odnosu na $\mathbf{x}$ i t .

Zadatak kod projektovanja upravljanja razmatranog sistema treba biti izbor vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ tako da kretanje razmatranog sistema ima željenu dinamiku. Pretpostavlja se da su komponente vektora upravljanja sistemom (4.1) definisane kao prekidne funkcije stanja

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i+}(\mathbf{x}, t), & g_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_{i-}(\mathbf{x}, t), & g_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (4.2)$$

gdje su $u_{i+}(\mathbf{x}, t)$ i $u_{i-}(\mathbf{x}, t)$ neprekidne funkcije u odnosu na $\mathbf{x}$ i t , te vrijedi $u_{i+}(\mathbf{x}, t) \neq u_{i-}(\mathbf{x}, t)$.

Iz definicije upravljanja (4.2) se vidi da u postupku projektovanja prekidnog upravljanja $u_i(t)$ treba odabrati odgovarajuće neprekidne funkcije $u_{i+}(\mathbf{x}, t)$ i $u_{i-}(\mathbf{x}, t)$, kao i pravilo uključenja tih funkcija koje se definiše funkcijama $g_i(\mathbf{x})$ koje predstavljaju klizne promjenljive.

Generalno može se zaključiti da promjena znaka pojedinih kliznih promjenljivih $g_i(\mathbf{x})$ uzrokuje promjenu pojedinih komponenti vektora upravljanja $u_i(t)$, koje djeluju na sistem (4.1). Ostvareno kretanje predstavlja kretanje u KR koje nastaje na presjeku svih površina $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) koje definišu kliznu površ G_E u $n - m$ dimenzionom prostoru

$$G_E := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \right\}, \quad (4.3)$$

gdje $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv [g_1(\mathbf{x}) \quad g_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad g_m(\mathbf{x})]^\top \in \mathbb{R}^m$ predstavlja vektor kliznih promjenljivi.

Iako će problem postojanja KR detaljno biti razmatran kasnije, ovdje je važno naglasiti da KR postoji na kliznoj površi ako su klizne promjenljive i njihovi izvodi suprotnog predznaka što se definiše kao $\lim_{g_i \rightarrow 0+} \dot{g}_i(\mathbf{x}) < 0$ i $\lim_{g_i \rightarrow 0-} \dot{g}_i(\mathbf{x}) > 0$.

Kod kretanja sistema u realnom KR sve komponente vektora $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ su bliske nuli. Tada, komponente vektora upravljanja $\mathbf{u}(t)$ osciluju teoretski beskonačnom frekvencijom između dvije vrijednosti $u_{i+}(\mathbf{x}, t)$ i $u_{i-}(\mathbf{x}, t)$, a njihova srednja vrijednost je konačna. Slijedi da u strukturi upravljanja postoji blok čiji je ulaz $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), a izlaz srednja vrijednost komponenti vektora upravljanja. Ovo znači da blok predstavlja pojačavač s jako velikom vrijednošću pojačanja, što je konvencionalni metod za smanjenje osjetljivosti ponašanja sistema na promjenu parametara sistema i uticaja poremećaja.

Za razliku od sistema s kontinualnim upravljanjem, ova osobina poznata kao invarijantnost (eng. *Invariance*) je dobijena koristeći prekidno upravljanje s konačnom vrijednošću. Trajektorija sistema koja odgovara kretanju u KR opisana je dinamičkim sistemom nižeg reda od originalnog sistema.

U analizi sistema s poznatim modelom, postoji nekoliko načina određivanja jednačina kretanja sistema u KR s obzirom na to da je takvo kretanje opisano diferencijalnim jednačinama koje s desne strane imaju prekidne funkcije. Ovakvi sistemi ne mogu se analizirati klasičnim metodama rješavanja diferencijalnih jednačina zbog diskontinuiteta u dinamici, pa se može koristiti metod Filipova [86].

Spomenuti pristup je ključan za razumijevanje ponašanja SUPS i za matematičko formulisanje KR kao dio dinamičkog sistema, te će biti detaljno pojašnjen u nastavku. Osim metode Filipova, jedan od najčešće korištenih načina određivanja jednačina kretanja sistema u KR je metod ekvivalentnog upravljanja. Ovaj metod omogućava određivanje glatkog upravljačkog signala koji bi održavao sistem u KR. Metod je u početku korišten samo za opisivanje KR, dok danas se široko primjenjuje za analizu ponašanja SUPS.

4.1.1. Metod Filipova

Ako je upravljanje $\mathbf{u}(t)$ u jednačini (4.1) prekidno, tada jednačina stanja sistema zatvorenog povratnom spregom poprima sljedeći oblik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t), \quad (4.4)$$

gdje je $\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ prekidna funkcija u odnosu na vektor stanja $\mathbf{x}(t)$.

Klasična teorija rješavanja diferencijalnih jednačina nije primjenjiva na ovaj problem zbog prekidne prirode funkcije $\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, t)$ budući da Lipšicov uslov neprekidnosti, odnosno postojanje jedinstvenog rješenja, dat sa

$$\|\mathbf{f}_c(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad L \in \mathbb{R}^+ \quad (4.5)$$

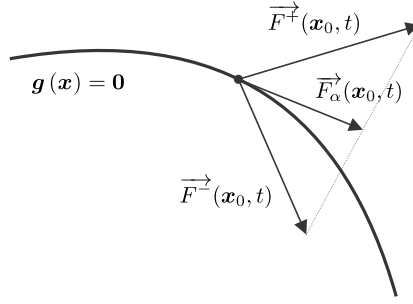
ne vrijedi, gdje $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ predstavljaju dvije proizvoljne vrijednosti vektora stanja dok $\|\star\|$ simbolizira Eukidovu normu. Međutim, koncept rješavanja ovakvih jednačina predložio je Filipov [86] gdje se za jednačine s prekidnom funkcijom na desnoj strani izvede rješenje pristupanjem tački prekida iz različitih pravaca.

Po Filipovu, diferencijalna jednačina (4.4) se mijenja diferencijalnom inkluzijom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (4.6)$$

gdje $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ označava skup svih mogućih funkcija koje mogu biti potencijalno rješenje. Sva rješenja po Filipovu predstavljaju apsolutno neprekidne krive.

Iz definicije slijedi da klasične diferencijalne jednačine u tački $\mathbf{x}_0$ pridružuju samo jedan pravac kretanja, dok u diferencijalnim inkluzijama tački $\mathbf{x}_0$ može biti pridruženo više različitih pravaca. Na ovaj način, stanje sistema nije ograničeno na jedan pravac kretanja, već može slobodno birati između više mogućih pravaca koji su povezani s tačkama u okolini tačke $\mathbf{x}_0$. Ova fleksibilnost je ključna za definisanje uslova pod kojima rješenja po Filipovu postoje.



Slika 4.2. Ilustracija rješenja po metodi Filipova

Grafička interpretacija definisanog rješenja po Filipovu je data na slici 4.2. Ako je $\mathbf{x}_0$ tačka prekida na površini $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a $F^-(\mathbf{x}_0, t)$ i $F^+(\mathbf{x}_0, t)$ predstavljaju granične vrijednosti funkcije $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ kada se tački $\mathbf{x}_0$ približava s različitih strana po površi $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. U ovom slučaju rješenje diferencijalne jednačine (4.4) po Filipovu se može zapisati u obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (1 - \alpha)F^-(\mathbf{x}, t) + \alpha F^+(\mathbf{x}, t), \quad (4.7)$$

gdje za skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi $0 < \alpha < 1$.

U posljednjoj jednačini skalar α se bira tako da vektor

$$F_\alpha \triangleq (1 - \alpha)F^-(\mathbf{x}, t) + \alpha F^+(\mathbf{x}, t) \quad (4.8)$$

predstavlja tangentu površi $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ u određenoj tački $\mathbf{x}$.

Na ovaj način jasno je pokazano da rješenje jednačine po Filipovu omogućava jedinstveno definisanje dinamike sistema čak i u prisustvu prekidnog upravljanja.

Korištenjem metode Filipova, u doktorskoj disertaciji akademkinje B. Peruničić-Dražnović [40] prvi put je primijenjen koncept usrednjenog upravljanja za sisteme s promjenljivom strukturom. Kasnije je prof. V. Utkin ovaj koncept reformulisao i razvio metodu ekvivalentnog upravljanja, koja danas predstavlja jedan od ključnih pristupa u analizi i sintezi kretanja sistema u KR.

4.1.2. Metod ekvivalentnog upravljanja

Za dobijanje jednačina kretanja u KR po presjeku definisanih površi može se koristiti metod ekvivalentnog upravljanja. Metod se široko primjenjuje za analizu ponašanja SUPS linearnim u odnosu na upravljanja koje može biti u linearnoj ili nelinearnoj formi.

Neka je sistem (4.1) došao na kliznu površ (4.3). U idealnom slučaju trajektorija sistema u KR ne napušta kliznu površ, pa je vektor brzine tangencijalan na kliznu površ. Dakle u idealnom KR ispunjeni su uslovi

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Primenjujući ove uslove na sistem (4.1) dobija se

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) \right) = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

gdje $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$ predstavlja Jakobijan matricu od vektora klizne površi $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ koja će biti označena sa $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Pretpostavljajući da je matrica $\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)$ regularna (nesingularna) za svako $\mathbf{x}$ i t , iz (4.11) se može odrediti upravljanje

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = -\left(\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\right)^{-1} \mathbf{Cf}(\mathbf{x}, t). \quad (4.12)$$

Upravljanje (4.12) naziva se ekvivalentno upravljanje (eng. *Equivalent Control*) koje kada se primjeni na sistem (4.1) dobija se diferencijalna jednačina

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \left(\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\right)^{-1} \mathbf{Cf}(\mathbf{x}, t), \quad (4.13)$$

koja opisuje trajektoriju kretanja sistema u KR na kliznoj površi (4.10).

Važno je naglasiti da ekvivalentno upravljanje (4.13) dobijeno iz (4.11) se primjenjuje tek nakon što trajektorija sistema dopiše na kliznu površ što je definisano sa (4.10). Ako uslov (4.10) nije ispunjen, kretanje sistema će biti ostvareno paralelno kliznoj površi. Stoga je potrebno formulisati algoritam upravljanja koji će osigurati da trajektorija sistema stigne na kliznu površ i ostane na kliznoj površi.

4.2. Uslovi dosezanja i održanja KR

Kod upravljanja SUPS osnovni cilj je dovesti trajektoriju sistema na željenu kliznu površ iz bilo kojeg početnog uslova u što kraćem vremenu. Nakon dosezanja željene klizne površi, potrebno je osigurati upravljačke signale koji će držati trajektoriju sistem na željenoj kliznoj površi.

U prethodnom odjeljku je naglašeno da ekvivalentno upravljanje (4.12) ima smisla tek onda kada klizna promjenljiva zadovoljava uslov (4.10). Zbog toga upravljanje (4.12), samo po sebi, ne može garantovati dosezanje klizne površi iz početnih uslova za koje je $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. Da bi se trajektorija sistema najprije dovele na $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a zatim na toj površi i održala $\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, zakon upravljanja se prirodno formira kao suma dvije komponente: nominalne komponente i nelinearne prekidne komponente.

Nominalna komponenta upravljanja, koja je obično glatka i može biti linearna ili nelinearna po stanju, se primarno vezuje za održavanje KR jer se njom na kliznoj površi nameće uslov invarijantnosti $\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i određuje dinamika kretanja duž $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ što predstavlja ekvivalentno upravljanje. Nasuprot tome, nelinearna (prekidna) komponenta definiše dinamiku kretanja trajektorije izvan klizne površi i ostvaruje dosezanje klizne površi kroz odgovarajući zakon dosezanja (eng. *Reaching Law*) u konačnom vremenu.

Neka je odabrano upravljanje sistemom (4.1) kao suma nominalnog i nelinearnog prekidnog dijela

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{nom}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad (4.14)$$

gdje je

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \text{sign}(g_1(\mathbf{x})) & \text{sign}(g_2(\mathbf{x})) & \dots & \text{sign}(g_m(\mathbf{x})) \end{bmatrix}^\top. \quad (4.15)$$

Uvrštavanjem (4.14) u (4.11) dobija se

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{nom}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})). \quad (4.16)$$

Radi preglednosti uvest će se smjene:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \triangleq \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{nom}(\mathbf{x}, t), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \triangleq -\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)\mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad (4.18)$$

tako da (4.16) postaje

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})). \quad (4.19)$$

U nastavku se koristi metod Ljapunova kako bi se dokazalo da je klizna površ privlačna, odnosno da zakon upravljanja obezbjeđuje stabilnost dinamike klizne promjenljive i konačno vrijeme doseganja. Kao funkcija Ljapunova koristit će se

$$V = \sum_{i=1}^m |g_i(\mathbf{x})| \quad (4.20)$$

iz koje se dobija izvod funkcije Ljapunova

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \text{sign}(g_i(\mathbf{x})) \dot{g}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma}^\top(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), \quad (4.21)$$

koji mora biti negativan da bi se na kliznoj površi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ostvario i održao KR.

Uvrštavanjem (4.19) u (4.21) dobija se

$$\dot{V} = \mathbf{\Sigma}^\top(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Sigma}^\top(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})). \quad (4.22)$$

Primjenom Cauchy-Schwarz nejednakosti ($\mathbf{\Sigma}^\top \phi \leq \|\mathbf{\Sigma}\| \|\phi\|$) na prvi član u (4.22) dobija se ograničenje

$$\mathbf{\Sigma}^\top(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}, t) \leq \sqrt{m} \|\phi(\mathbf{x}, t)\|. \quad (4.23)$$

S obzirom na to da drugi član u (4.22) predstavlja kvadratnu formu $\mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Sigma}$, poznato je da takva forma zavisi samo od simetričnog dijela matrice $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ definisanog kao $\mathbf{\Gamma}_{sim} = \frac{1}{2}(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{\Gamma}^\top(\mathbf{x}, t))$. Primjenom ove osobine i Rejljevog teorema o ograničenju kvadratne forme ($\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\} \leq \frac{\mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{\Gamma}_{sim} \mathbf{\Sigma}}{\mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{\Sigma}} \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}$), drugi član u (4.22) se može ograničiti kao

$$\mathbf{\Sigma}^\top(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \geq m \lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}. \quad (4.24)$$

Uvrštavanjem nejednakosti (4.23) i (4.24) u (4.22), dobija se

$$\dot{V} \leq \sqrt{m} \|\phi(\mathbf{x}, t)\| - m \lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}. \quad (4.25)$$

Ako vrijedi $\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, nejednakost (4.25) postaje $\dot{V} \leq -m \lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}$ na osnovu čega se može zaključiti da za $\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\} > 0$ biće ostvaren i održan KR na kliznoj površi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Vrijeme dosezanja trajektorije sistema t_{kr} na kliznu površ je konačno i može se odrediti koristeći

$$t_{kr} \leq \frac{V(0)}{m\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}}. \quad (4.26)$$

Iz (4.17) se može pokazati da će uslov $\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ biti zadovoljen ako $\mathbf{u}_{nom}(\mathbf{x}, t)$ predstavlja ekvivalentno upravljanje definisano kao (4.12). Uslov $\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\} > 0$ može biti zadovoljen prilikom odabira matrice $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ kod nelinearnog prekidnog upravljanja u (4.14). Ako se kao $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ odabere dijagonalna matrica $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ čiji koeficijenti su $q_i > 0$, onda će upravljanje $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ iz jednačine (4.19) biti

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t))^{-1}\mathbf{Q}. \quad (4.27)$$

pod uslovom da je matrica $\mathbf{CB}(\mathbf{x}, t)$ regularna (nesingularna).

Uvrštavanjem (4.27) u (4.19), dobija se jednačina

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)), \quad (4.28)$$

koja opisuje ponašanje kliznih promjenljivih.

Ukoliko je $\phi(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$ ali vrijedi $\|\phi(\mathbf{x}, t)\| \leq \Phi \in \mathbb{R}$ tada (4.25) postaje $\dot{V} \leq \sqrt{m}\Phi - m\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\}$. Da bi uslov $\dot{V} < 0$ bio zadovoljen, potrebno je da vrijedi $\lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_{sim}\} > \frac{\Phi}{\sqrt{m}}$. Posljednji uslov pokazuje da će KR biti ostvaren i održan na kliznoj površi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ako se pogodno odabere matrica $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ iako se kao nominalno upravljanje $\mathbf{u}_{nom}(\mathbf{x}, t)$ ne koristi ekvivalentno upravljanje. Ova analiza pokazuje da je sistem otporan na nesigurnosti i poremećaje koji mogu nastupiti u razmatranom sistemu.

Prethodno izvedeni uslovi dosezanja i održanja KR daju osnovu za sintezu upravljanja. Međutim, ovdje je važno naglasiti da kod sistema s vektorskim upravljanjem proces uspostavljanja KR nije jednostavan, jer je potrebno organizovati dosezanje na presjeku svih površi $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$). U tom slučaju se postavlja pitanje na koji način koordinirati m upravljačkih signala $u_i(t)$ kako bi se KR uspostavio na željenom presjeku, što vodi ka različitim strategijama organizacije dosezanja u višedimenzionalnom slučaju. U teoriji je pokazano da se proces uspostavljanja KR može organizovati na jedan od sljedeća četiri načina:

1. Dosezanje KR s fiksnim redoslijedom kada se upravljačkim signalom u_1 organizuje KR na površi G_1 , a zatim upravljačkim signalom u_2 organizuje KR na presjeku površi G_1 i G_2 itd, sve dok se konačno upravljačkim signalom u_m ne organizuje kretanje sistema na presjeku svih površi G_i ($i = 1, \dots, m$). Ovakav način organizovanja KR na kliznoj površi G_E se matematički može zapisati kao

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow G_1 \rightarrow G_1 \cap G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_m \rightarrow G_E. \quad (4.29)$$

Svaka klizna površ opisuje za red niži sistem od polaznog sistema tako da će konačno kretanje sistema (4.33) biti opisano diferencijalnom jednačinom reda $(n - m)$.

2. Dosezanje KR s proizvoljnim redoslijedom kod koga se kretanje u KR organizuje bez fiksiranja redoslijeda primjene upravljačkih signala. U ovom slučaju, prva površ i svaki naredni presjek se bira bez unaprijed definisanog redoslijeda, pa se organizovanja KR na kliznoj površi G_E matematički može zapisati kao

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow G_{i_1} \rightarrow G_{i_1} \cap G_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow G_{i_1} \cap G_{i_2} \cap \dots \cap G_{i_m} \rightarrow G_E. \quad (4.30)$$

3. Direktno dosezanje KR, kada se vektor upravljanja bira tako da se odmah uspostavi KR na presjeku svih površi i KR na kliznoj površi G_E se može zapisati kao

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow G_E. \quad (4.31)$$

4. Decentralizovano dosezanje KR, kada se na svakoj od površi G_i ($i = 1, \dots, m$) organizuje KR pomoću jednog od upravljačkih signala. Ovaj način dovodi do raspredanja sistema i nezavisnog projektovanja svakog dijela sistema, što je veoma pogodno za sisteme višeg reda. Ako je sistem potpuno raspregnut, tada nema međusobnog uticaja jednog podsistema na drugi. U suprotnom slučaju, uticaj drugih podsistema na posmatrani sistem se tretira kao vanjski poremećaj.

4.3. Projektovanje regulatora zasnovanog na KR

Osnovna ideja SUPS u KR, koja je prvo primijenjena na kontinualne sisteme, bila je ta da se omogući robusno upravljanje dinamičkih sistema u prisustvu nesigurnosti i poremećaja. U prethodnom odjeljku je pokazano da upravljanje izvedeno u KR prvo dovodi stanje do klizne površi, a potom osigurava da ostane na njoj. Prikladan način projektovanja regulatora zasnovanog na KR pruža podešavanje karakteristika kretanja sistema poput željene dinamike, eliminacije uticaja poremećaja, optimalnog ponašanja trajektorije, robusne stabilnosti i slično.

Slijedi da su dva glavna zadatka kod projektovanja regulatora zasnovanog na KR:

- odrediti odgovarajuću kliznu površ kako bi se postigla željena dinamika kretanja sistema u KR,
- odabrati odgovarajuće prekidno upravljanje koje će osigurati dosezanje klizne površi a zatim održati kretanje sistema po njoj.

4.3.1. Projektovanje klizne površi

Projektovanje klizne površi će biti objašnjeno na primjeru LTI viševarijabilnog sistema kod koga je dostupno stanje predstavljeno jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (4.32)$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica sistema, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrica ulaza, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema i $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja sistemom.

Cilj projektovanja klizne površi je osigurati da kretanje sistema u KR bude opisano zadanim spektrom polova. Neka je željena dinamika sistema definisanog sa (4.32) opisana jednačinom

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

gdje je $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica čije su komponente konstantne vrijednosti, tako da vektor površi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ definiše m površi $g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i \mathbf{x}$ ($i = 1, \dots, m$) gdje je $\mathbf{c}_i$ i -ti red matrice $\mathbf{C}$. Na ovaj način kretanje sistema u KR se organizuje na svakoj od površi $g_i(\mathbf{x}) = 0$, pa tako postoji i na njihovom presjeku.

Slično kao kod sistema definisanog u oštem slučaju (vidi (4.12)), vektor ekvivalentnog upravljanja sistemom (4.32) je definisan kao

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = -(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (4.34)$$

Da bi se odredilo ekvivalentno upravljanje matrica $\mathbf{C}\mathbf{B}$ mora imati puni rang m , te stoga i matrica $\mathbf{C}$ mora imati puni rang. Kod projektovanja kliznih površi najčešće se usvaja da je $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ gdje je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jedinična matrica.

U (4.34), može se uvesti matrica $\mathbf{K} = (\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$ ($\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$) koja predstavlja matricu pojačanja povratne sprege. Primjenom upravljanja (4.34) na sistem (4.32) dobijaju se jednačine koje definišu linearni autonomni sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t), \quad (4.35)$$

uz ograničenje

$$\mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

Jednačina (4.36) predstavlja sistem m linearnih jednačina po n stanja x_i koji dinamiku sistema (4.35) svodi na dinamiku sistema $(n - m)$ reda. Ovo je jedna vrlo važna osobina KR gdje originalni sistem reda n s kliznom površi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ eliminiše m nezavisnih stanja x_i , tako da se dinamika sistema u KR odvija u potprostoru dimenzija $n - m$ a matrica $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ će imati rang $n - m$.

Posmatrajući (4.34), očigledno je da postoji određena veza između matrice $\mathbf{C}$ i matrice $\mathbf{K}$. Stoga, pronalaženje matrice $\mathbf{C}$ koja omogućava željenu dinamiku kretanja sistema u KR, definisanu sopstvenim vrijednostima matrice $\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, ekvivalentno je pronalaženju matrice pojačanja povratne sprege $\mathbf{K}$ koja postavlja polove spregnutog sistema na željene lokacije. U nastavku će biti prezentiran jedan način određivanja matrice $\mathbf{C}$.

Koristeći prethodne relacije, matrica $\mathbf{C}$ se može dobiti rješavanjem sljedećeg sistema matričnih jednačina:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{I}. \quad (4.38)$$

U prethodnom matričnom sistemu broj nepoznatih $c_{i,j}$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) kao elemenata matrice $\mathbf{C}$ je mn . Broj nezavisnih linearnih jednačina predstavljenih matričnom jednačinom (4.37) je najviše $m(n - m)$ zbog smanjenog

ranga matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, dok broj nezavisnih linearnih jednačina predstavljenih matricnom jednačinom (4.38) iznosi m^2 . Ukupan broj nezavisnih linearnih jednačina ne prelazi $m(n - m) + m^2 = mn$. Pošto broj nepoznatih elemenata matrice $\mathbf{C}$ iznosi mn , rješenje sistema postoji.

Kombinujući jednačine (4.37) i (4.38), jednačina (4.37) poprima oblik $\mathbf{CA} = \mathbf{K}$ tako da posljednji sistem matricnih jednačina se može zapisati u obliku

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Rješenje ove jednačine može se dobiti primjenom metode računanja pseudo-inverzne matrice, tako da se dobija

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^\dagger, \quad (4.40)$$

gdje $\dagger$ je oznaka za pseudo-inverzni operator.

Kako bi se odredila matrica $\mathbf{C}$, neophodno je prethodno izvršiti izbor matrice $\mathbf{K}$ koja treba osigurati da željena dinamika sistema u KR bude definisana sa m nultih sopstvenih vrijednosti i $n - m$ proizvoljno izabranih stabilnih sopstvenih vrijednosti. Matrica $\mathbf{K}$ se može odrediti različitim metodama projektovanja upravljanja, kao što su metoda podešavanja polova (eng. *Pole-Placement*) ili primjenom LQR metode. Nakon odabira matrice $\mathbf{K}$, pristupa se rješavanju matricne jednačine (4.40) gdje se dobija matrica $\mathbf{C}$ koja ostvaruje željenu dinamiku sistema.

Dati postupak određivanja matrice $\mathbf{C}$ je ovdje dat za sisteme u kontinualnom vremenskom domenu. Isti postupak, po formi, se može primijeniti i za sintezu klizne promjenljive u vremenski diskretnoj formi. Osim toga, u referenci [56] postupak je proširen i na sisteme s integralnim KR.

4.3.2. Zakoni dosezanja KR

Drugi važan zadatak kod projektovanja regulatora zasnovanog na KR jeste odabir nelinearnog prekidnog upravljanja koje će osigurati dosezanje klizne površi u konačnom vremenu i održati kretanje u KR što je definisano sa (4.28). Slijedi da se ovaj zadatak može postaviti kao određivanje zakona promjene izvoda kliznih promjenljivih $\dot{\mathbf{g}}(t)$ u obliku

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{g}(t)), \quad (4.41)$$

gdje $\varphi \in \mathbb{R}^m$ predstavlja funkciju osmišljenu da osigura željeno ponašanje kliznih promjenljivih. Konkretno, $\varphi(\mathbf{g}(t))$ mora osigurati da sve klizne promjenljive konvergiraju ka kliznoj površi i da se klizno kretanje nastavi nakon što je dostignuta klizna površ. Funkcija $\varphi(\mathbf{g}(t))$ uvijek mora imati svoj znak suprotan znaku klizne promjenljive $\mathbf{g}(t)$ što garantuje postojanje KR.

Kako bi se dobio eksplicitni upravljački signal u fazi dosezanje KR, lijevu stranu izraza (4.41) potrebno je zamijeniti sa (4.33) kako bi se dobio izraz

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \varphi(\mathbf{g}(t)). \quad (4.42)$$

Uvrštavanjem (4.32) u (4.42), te rješavajući dobijenu jednačinu po $\mathbf{u}(t)$ dobija se izraz za upravljanje

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\varphi(\mathbf{g}(t)), \quad (4.43)$$

koji se zamjenom (4.34) može zapisati u jednostavnijoj formi kao

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{eq}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\varphi(\mathbf{g}(t)). \quad (4.44)$$

Dobijeni upravljački signal uz odgovarajuće izabranu funkciju $\varphi(\mathbf{g}(t))$ će osigurati dosezanje klizne površi u konačnom vremenu sa stabilnom trajektorijom kretanja, što je pokazano u odjeljku 4.2.

U opštem slučaju, klizna površ se definiše vektorom kliznih promjenljivih $\mathbf{g}(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ \dots \ g_m(t)]^\top$, pa je i zakon promjene izvoda vektora kliznih promjenljivih definisan vektorskom funkcijom $\varphi \in \mathbb{R}^m$. Za potrebe projektovanja i praktične realizacije, $\varphi(\mathbf{g}(t))$ se uglavnom formira kao skup nezavisno odabranih skalarnih funkcija po svakoj komponenti $g_i(t) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$), tako da vrijedi $\varphi(\mathbf{g}(t)) = [\varphi_1(g_1) \ \varphi_2(g_2) \ \dots \ \varphi_m(g_m)]^\top$. Kako bi se osiguralo da svaka komponenta $g_i(t)$ konvergira ka nuli i održava KR nakon dosezanja klizne površi, potrebno je da vrijedi $g_i \varphi_i(g_i) < 0$ za $\forall g_i \neq 0$.

Po ovom principu i uz uslov (4.38) dobija se da svaki kanal upravljanja dominantno zavisi od svoje skalarne klizne promjenljive g_i . To znači da se bez umanjavanja opštosti može razmatrat skalarni zakon dosezanja KR u opštem obliku definisan kao $\dot{g}(t) = \varphi(g(t))$, ali predstavljena metodologija se može lahko proširiti na viševarijabilne sisteme s više ulaza što je definisano sa (4.41). U nastavku će biti prikazano pet najčešće korištenih funkcija $\varphi(g(t))$ kao zakona dosezanja.

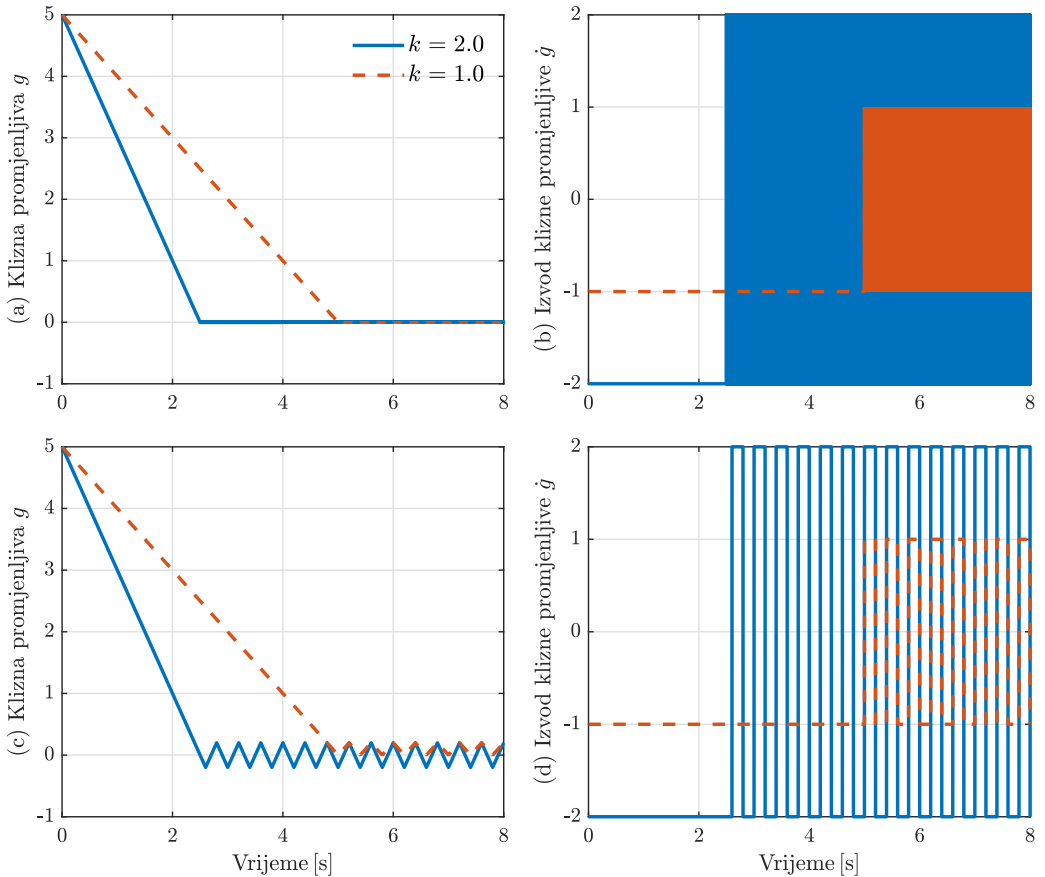
Konstantni zakon dosezanja

U skladu s metodom predloženom u [87], predložena su tri zakona dosezanja KR za sisteme u kontinualnom vremenskom domenu. Prvi, poznat kao konstantni zakon dosezanja, izražen je kao

$$\dot{g}(t) = -k \operatorname{sign}(g(t)), \quad k > 0. \quad (4.45)$$

Prednost ove strategije je njena jednostavnost, jer se prekidno upravljanje direktno primjenjuje na kliznu površ. Prilikom odabira parametra k nameće se kompromis između brzine konvergencije i oscilacija kod kretanja u KR.

Slika 4.3 prikazuje vremensku promjenu klizne promjenljive $g(t)$ i njenog izvoda $\dot{g}(t)$ za konstantni zakon dosezanja pri dvije vrijednosti pojačanja k . Povećanje pojačanja k dovodi do bržeg dosezanja klizne površi $g = 0$ (slike 4.3(a) i 4.3(b)).



Slika 4.3. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenog izvoda za konstantni zakon dosezanja pri različitoj vrijednosti k i vremenu izvršavanja algoritma

Implementacijom ovog zakona dosezanja na digitalnom hardveru, uočava se da nakon dosezanja okoline klizne površi javlja se treperenje kod klizne promjenljive što se opisuje kao kvazi KR. Širina opsega u kojem se javlja kvazi KR zavisi od frekvencije izvršavanja algoritma (slike 4.3(c) i 4.3(d)). Intenzitet prekidačkog djelovanja i amplituda oscilacija rastu s povećanjem pojačanja k , čime se ističe važnost kompromisa između brzine konvergencije i treperenja u kvazi KR. O ovome će više biti govora u poglavlju o diskretnim KR.

Gaov zakon dosezanja

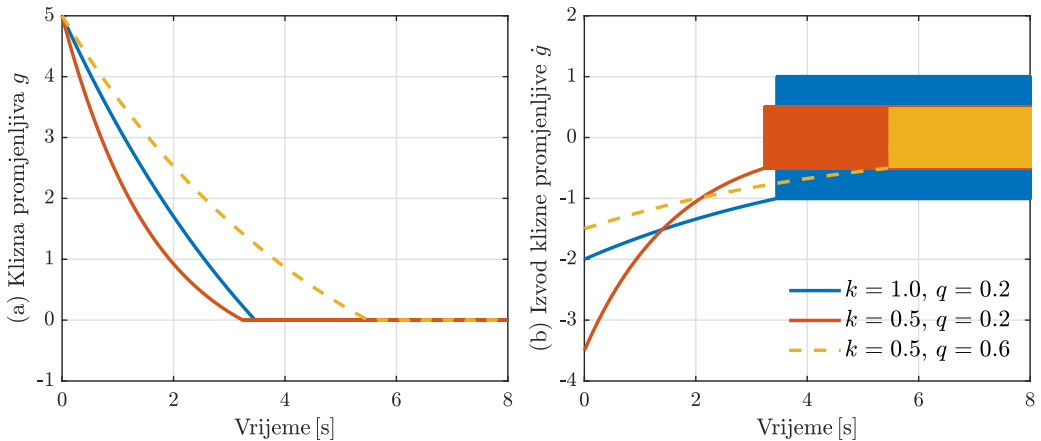
Gao i Hung su u naučnom radu [87] predložili strategiju dodavanja proporcionalne povratne sprege po g konstantnom zakonu dosezanja

$$\dot{g}(t) = -qg(t) - k \operatorname{sign}(g(t)), \quad (4.46)$$

gdje su $k > 0$ i $q > 0$.

Prvi član povećava brzinu konvergencije za relativno velike vrijednosti klizne promjenljive, omogućujući brže dosezanje stanja bez žrtvovanja stabilnosti klizanja. S druge strane, proporcionalni član smanjuje intenzitet upravljanja na kliznoj površi, čime se sprječavaju prekomjerne oscilacije u KR.

Za ovaj zakon upravljanja, na slici 4.4 su dati signali klizne promjenljive i njenog izvoda pri različitim vrijednostima k i q .



Slika 4.4. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenog izvoda za Gaov zakon dosezanja pri različitim vrijednostima k i q

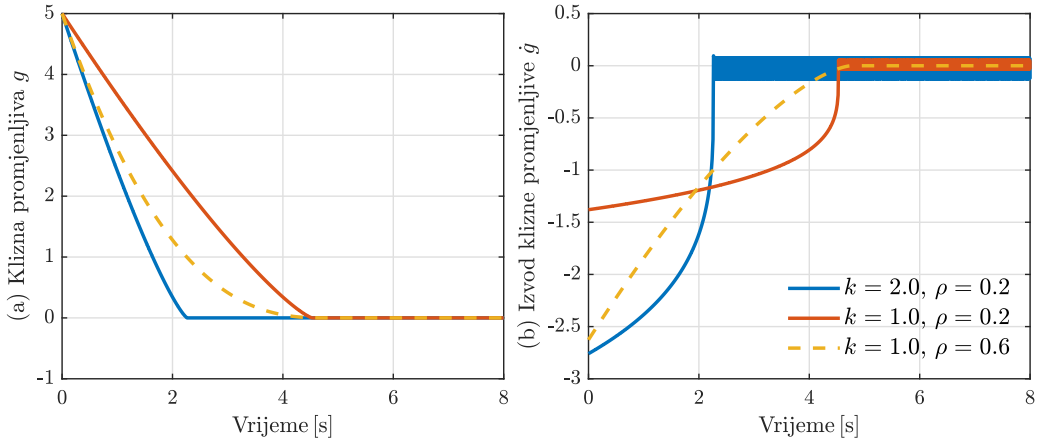
Stepeni zakon dosezanja

U [87] predložen je stepeni zakon dosezanja zasnovan na funkciji

$$\dot{g}(t) = -k |g(t)|^\rho \text{sign}(g(t)), \quad (4.47)$$

gdje je $k > 0$ i $0 < \rho < 1$.

Ovaj zakon osigurava brzo dosezanje klizne površini uz eliminaciju neželjenih oscilacija u fazi kretanja po kliznoj površi. Zapravo, pokazano je da ova strategija omogućava fazu dosezanja u konačnom vremenu i da nedostatak konstantnog člana $-k g(t)$ smanjuje preskok. Vremenski signali klizne promjenljive i njenog izvoda za različite vrijednosti k i ρ su dati na slici 4.5.



Slika 4.5. Vremenska promjena klizne promjenljive za stepeni zakon dosezanja pri različitim vrijednostima k i ρ

Složeni eksponencijalni zakon dosezanja

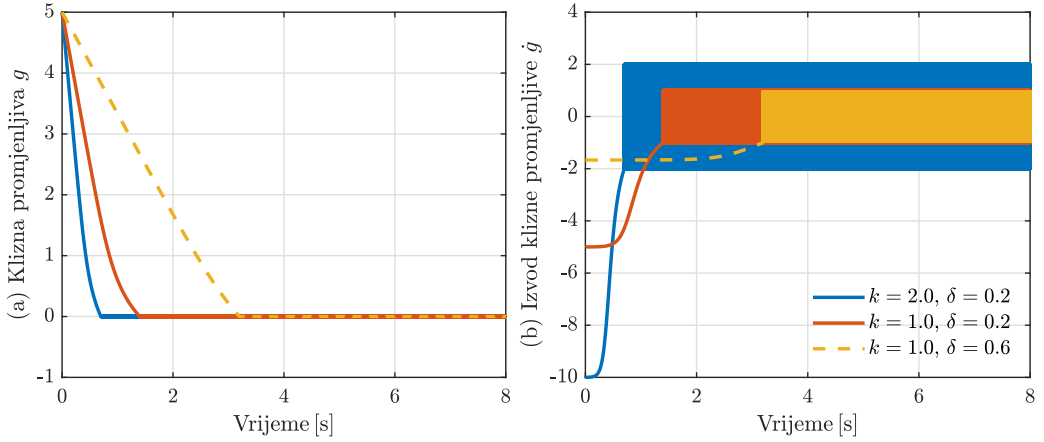
Nekoliko autora radilo je na proširenju metode razvijene od strane Gao i Hunga [87]. Cilj novih rješenja bio je poboljšanje zakona dosezanja. U naučnom radu [88] predložena je modifikacija eksponencijalnog zakona dosezanja (4.47) u obliku

$$\dot{g}(t) = -\kappa(g(t)) \text{sign}(g(t)), \quad (4.48)$$

$$\kappa(g(t)) = k \frac{1}{\delta + (1 - \delta)e^{-\alpha|g(t)|^\rho}}. \quad (4.49)$$

gdje su $k > 0$, $\alpha > 0$, $\rho > 0$ i $0 < \delta < 1$.

Može se uočiti da član na desnoj strani jednačine (4.49) teži k/δ za velike vrijednosti klizne promjenljive g i teži k kako se klizna promjenljiva g približava nuli. Kao posljedica toga, predložena strategija može osigurati bržu konvergenciju i smanjeno preskakanje u poređenju sa zakonom dosezanja zasnovanim na eksponencijalnoj promjeni. Vremenski signali klizne promjenljive i njenog izvoda pri različitim vrijednostima parametara su dati na slici 4.6.



Slika 4.6. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenog izvoda za složeni eksponencijalni zakon dosezanja pri različitim vrijednostima parametara k i δ uz fiksne parametre $\rho = 1$ i $\alpha = 2$

Adaptivni zakon dosezanja

Autor rada [89] predložio je adaptivni zakon dosezanja

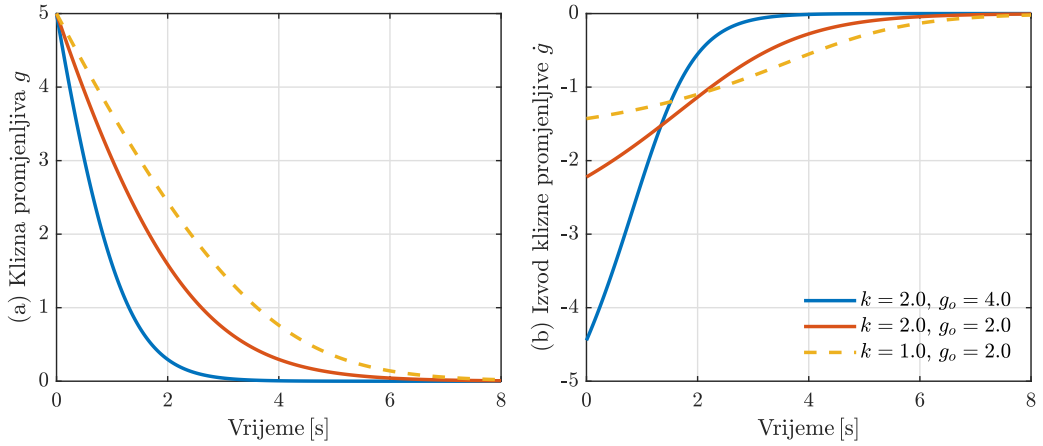
$$\dot{g}(t) = -\kappa(g(t))g(t), \quad (4.50)$$

gdje je

$$\kappa(g(t)) = k \frac{g_o}{g_o + |g(t)|}, \quad (4.51)$$

pri čemu su $k > 0$ i $g_o > 0$.

Cilj ovog pristupa je osigurati donje i gornje granice promjene klizne promjenljive. Ovo je postignuto zamjenom proporcionalnog člana u zakonu dosezanja (4.46) s ograničenim nelinearnim izrazom. Može se pokazati da su upravljački signal i sve promjenljive stanja ograničene odabranim parametrima neovisno o početnim uslovima sistema. Vremenski signali klizne promjenljive i njenog izvoda pri različitim vrijednostima parametara su dati na slici 4.7.



Slika 4.7. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenog izvoda za adaptivni zakon doseganja pri različitim vrijednostima k i g_o

Prethodna razmatranja su provedena za idealni model bez poremećaja, pa se dobijeni zaključci o brzini konvergencije i glatkoći upravljačkog signala ne mogu usvojiti za realne uslove rada. Stoga se u narednom odjeljku uvode poremećaji i razmatraju uslovi invarijantnosti kliznog režima.

★ ★ ★ ★ ★

5. Invarijantnost sistema na poremećaje u KR

Najznačajnija osobina SUPS je mogućnost da se pod određenim uslovima postigne neosjetljivost sistema u KR na parametarska odstupanja i vanjske poremećaje. Naime, teorijski je utvrđeno da je moguće, pod određenim uslovima, ostvariti kretanje sistema u KR koje je u potpunosti neosjetljivo na djelovanje vanjskih poremećaja i odstupanja parametara objekta upravljanja. Do ovog fundamentalnog rezultata je došla akademkinja B. Peruničić-Draženović u svojim istraživanjima, koje je objavila 1969. godine u svom pionirskom radu [5] iz ove oblasti. Uslovi pod kojima se ostvaruje ova osobina u KR je nazvala uslovima invarijantnosti, koji su kasnije u međunarodnoj literaturi dobili opšteprihvaćen termin *matching conditions*.

Važno je napomenuti da se osobina invarijantnosti na parametarske i vanjske poremećaje javlja u idealnom KR, koji je nemoguće praktično realizovati usljed neminovnog postojanja neidealnosti u sistemu. Zbog toga u praktičnim realizacijama ove upravljačke strategije, koje karakteriše nastanak tzv. realnog KR, osobina invarijantnosti se redukuje u veliku robusnost. Iz tih razloga se ova upravljačka tehnika svrstava u kategoriju robusnih sistema upravljanja.

5.1. KR u sistemima s poremećajima kroz kanal upravljanja

U izvođenju uslova invarijantnosti krenulo se od modela u prostoru stanja linearnog viševarijabilnog dinamičkog sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t), \quad (5.1)$$

gdje je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja, a $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^l$ je vektor nepoznatog ograničenog vanjskog poremećaja ($|f_i| < \Delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$). Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$ su konstantne i imaju odgovarajuće dimenzije. Matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$ trebaju biti punog ranga ($\text{rang}\{\mathbf{B}\} = m$ i $\text{rang}\{\mathbf{D}\} = l$). Cilj upravljanja je ostvariti KR na kliznoj površi $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ u Euklidovom potprostoru dimenzije $n - m$. Najčešće korištena klizna površ je ravan koja sadrži koordinatni početak i koja je definisana sljedećom kliznom promjenljivom

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (5.2)$$

gdje je $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ konstantna matrica punog ranga.

Dobro je poznato da se KR može postići jedino prekidnim upravljanjem koje ima prekide prvog reda na kliznoj površi. Dakle, dinamičko ponašanje sistema u KR se opisuje diferencijalnim jednačinama s prekidnom desnom stranom [86], što predstavlja problem. Do opisa dinamike sistema u KR, u naučnom radu [5] je originalno predložena metoda koja se bazira na sljedećem rezonovanju. Naime, kako u KR trajektorija sistema ne napušta klizni potprostor u kome važi $\mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, tada i vektor brzine takode mora pripadati kliznoj površi.

To znači da se može pisati

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Uzimajući u obzir (5.1), iz jednačine (5.3) se dobija relacija

$$\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_s(t) + \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

iz koje se može izraziti upravljanje $\mathbf{u}_s(t)$ u KR. Pod pretpostavkom da je $\mathbf{C}\mathbf{B}$ nesingularna matrica ($\det\{\mathbf{C}\mathbf{B}\} \neq 0$), $\mathbf{u}_s(t)$ se može odrediti na jedinstveni način kao

$$\mathbf{u}_s(t) = -(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)\right). \quad (5.5)$$

Zamjenom dobijenog upravljanja u (5.1) uz egzistenciju KR dobija se dinamika KR, koja je opisana kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)\right), \quad \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Ovako određeno upravljanje predstavlja ekvivalentno upravljanje, a navedeni postupak nalaženja dinamike sistema u KR metoda ekvivalentnog upravljanja [7]. Treba istaći da je ova metoda postala dominantan pristup u prevazilaženju

problema nalaženja dinamike sistema u KR. Iz dinamike sistema u KR (5.6) može se lahko uočiti da na nju neće uticati vanjski poremećaj ukoliko za bilo koju vrijednost vektora vanjskog poremećaja $\mathbf{f}(t)$ važi jednačina

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\right)\mathbf{D}\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.7)$$

U tom slučaju vanjski poremećaj neće figurisati u jednačini kretanja sistema u KR, te se može reći da je sistem u KR invarijantan na djelovanje poremećaja. Jednačina (5.7) se može napisati u obliku

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{f}(t). \quad (5.8)$$

Može se lahko dokazati da je uslov (5.8) ispunjen ukoliko se vektor $\mathbf{D}\mathbf{f}(t)$ može napisati kao $\mathbf{D}\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\mathbf{w}(t)$. Ovo bi značilo da su kolone matrice $\mathbf{D}$ linearna kombinacija kolona matrice $\mathbf{B}$. Ovaj zahtjev se može predstaviti relacijom

$$\text{rang} \{ [\mathbf{B} \ \mathbf{D}] \} = \text{rang} \{ \mathbf{B} \}. \quad (5.9)$$

Dakle, uslov (5.9) predstavlja uslov invarijantnosti sistema (5.1) u KR na vanjski poremećaj. Izvedeni uslov invarijantnosti ima svoje fizičko tumačenje, a to je da poremećaj ulazi u sistem kroz kanal upravljanja.

Moguće je posmatrati i uticaj varijacija parametara sistema. Na primjer, neka postoje varijacije parametara u matrici sistema $\mathbf{A}$. U tom slučaju se ova matrica može dekomponovati kao $\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_v$, gdje je $\mathbf{A}_v$ matrica koja sadrži sve parametre sistema s mogućim varijacijama, dok se matrica $\mathbf{A}_c$ sastoji od preostalih elemenata matrice $\mathbf{A}$. Na osnovu (5.6) se može dobiti odgovarajući opis u KR

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_v\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t)\right), \quad \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Varijacije parametara neće imati uticaj na dinamiku sistema u KR ukoliko taj član nestane iz (5.10). Uslov za to je da važi

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\right)\mathbf{A}_v\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Neka su kolone matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ bazni vektori potprostora u kome se odvija KR. Tada se vektor stanja $\mathbf{x}(t)$ može u tom potprostoru izraziti kao $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}^*(t)$, gdje vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{n-m}$ sadrži promjenljive stanja koje se nezavisno mogu mijenjati

u posmatranom kliznom potprostoru. Tada uslov (5.11) postaje

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{C} \right) \mathbf{A}_v \mathbf{T} \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Ova jednačina je slična jednačini (5.7), pa se može zaključiti da će uslov invarijantnosti na parametarske poremećaje biti

$$\text{rang} \{ [\mathbf{B} \ \mathbf{A}_v \mathbf{T}] \} = \text{rang} \{ \mathbf{B} \}. \quad (5.13)$$

Neka su kolone matrice $\mathbf{T}$ vektori $\mathbf{t}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - m$). Svaki od njih mora zadovoljiti uslov da je $\mathbf{A}_v \mathbf{t}_i$ linearna kombinacija kolona matrice $\mathbf{B}$, to jest

$$\text{rang} \{ [\mathbf{B} \ \mathbf{A}_v \mathbf{t}_i] \} = \text{rang} \{ \mathbf{B} \}. \quad (5.14)$$

Invarijantnost dinamike sistema u KR na sve vanjske i parametarske poremećaje koje djeluju na sistem u prostoru (kroz kanal) upravljanja, nije samo svojstvo linearnih objekata upravljanja. Ova osobina je prisutna i kod nelinearnih sistema. Posmatrajmo nelinearni sistem koji je opisan dinamičkom jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + (\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \mathbf{u} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (5.15)$$

gdje je $\mathbf{p}$ vektor neodređenih parametara, $\mathbf{v}$ vektor vanjskih poremećaja i $\Delta \mathbf{f}$ i $\Delta \mathbf{B}$ su perturbacije sistema. Uslovi invarijantnosti posmatranog sistema (5.15) u KR na prisutne poremećaje i perturbacije su dati relacijama:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \\ \Delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

čiji je dokaz dat u naučnom radu [87].

Dokaz ovih uslova se takođe bazira na primjeni metode ekvivalentnog upravljanja, kao i u slučaju linearnog sistema, gdje se pokazuje da pod uslovima (5.16) u jednačini koja opisuje dinamiku sistema ne figurišu članovi koji zavise od $\Delta \mathbf{f}$, $\Delta \mathbf{B}$ i $\mathbf{v}$. I u ovom slučaju se uslovi invarijantnosti (5.16) mogu fizički protumačiti tako da se invarijantnost sistema u KR javlja ukoliko poremećaji i perturbacije sistema djeluju na sistem u prostoru upravljanja.

Važno je podsjetiti da bez obzira što poremećaji koji ispunjavaju uslove invarijantnosti ne utiču na kretanje sistema u KR, oni imaju uticaj na fazu dosezanja KR, kao i svi ostali tipovi poremećaja. Iz tih razloga ih treba uzeti u razmatranje prilikom projektovanja zakona upravljanja, jer upravljanje u sistemu treba obezbijediti dolazak sistema na kliznu površ za konačno vrijeme i egzistenciju KR nakon toga, uprkos djelovanju parametarskih i vanjskih poremećaja.

Na kraju treba istaći da ovaj koncept invarijantnosti sistema na unutrašnje i vanjske poremećaje s izvedenim uslovima prevazilaze okvire SUPS, i imaju značenje, fizičko opravdanje i u ostalim sistemima upravljanja.

5.2. KR u sistemima s poremećajima van kanala upravljanja

Uslovi invarijantnosti, koji zahtijevaju da poremećaji djeluju na sistem kroz kanal upravljanja, nisu u praksi uvijek ispunjeni. Poremećaji koji nisu u opsegu matrice ulaza $\mathbf{B}$ će imati uticaj na dinamiku sistema u KR, što se vidi u jednačinama (5.6) i (5.10). U nekim slučajevima, KR duž određenih površi je rezultovao značajnom degradacijom dinamike pod djelovanjem ovih poremećaja. Zbog toga su KR u sistemima s poremećajima van kanala upravljanja privukli veliku pažnju naučne zajednice sa ciljem da se ublaži njihov uticaj na kretanje u KR.

Efekti djelovanja poremećaja van kanala upravljanja na dinamiku sistema u KR zavise od same prirode poremećaja. Pod pretpostavkom da su uslovi dosezanja i egzistencije KR ispunjeni u prisustvu poremećaja, mogu se identifikovati dvije različite situacije. Kada poremećaji van kanala upravljanja imaju parametarsku prirodu (multiplikativni poremećaji) ili zavise od promjenljivih stanja, moguće je ostvariti asimptotsku stabilnost adekvatnim izborom klizne površi [90–92]. Ova mogućnost je ostvarena činjenicom da ovakvi poremećaji se smanjuju i nestaju s približavanjem stanja sistema koordinatnom početku.

Međutim, ukoliko poremećaji van kanala upravljanja, pored multiplikativnih sadrže i vanjske (aditivne) poremećaje asimptotska stabilnost se ne može ostvariti. Naime, ovi poremećaji koji ne iščezavaju onemogućiće da stanje sistema konvergira ka koordinatnom početku, već će stanje sistema klizajući po površi doći u neku okolinu koordinatnog početka. Jedini način da se djeluje protiv ovih poremećaja je da se sprovede konstrukcija klizne površi na način koji će u nekom smislu ublažiti djelovanje ovih poremećaja na dinamiku sistema u KR.

Prirodan pristup bi bio da klizna površ ne pojačava djelovanje ovih poremećaja na sistem [93]. Još jedan adekvatan izbor klizne površi je dat u [94], koji obezbjeđuje konvergenciju stanja linearnog sistema u minimalni invarijantni elipsoid. Oba ova pristupa posmatraju poremećaje opšteg tipa.

U [95] je uočeno da se, u slučaju konstantnih vanjskih poremećaja van kanala upravljanja, može konstruisati drugačija klizna površ od preporučene u [93], koja obezbjeđuje bolju tačnost sistema. Pored ovoga, konstantni i sporopromjenljivi vanjski poremećaji se veoma često susreću u praksi. Iako se konvencionalni PI regulatori uglavnom koriste za eliminaciju ovog tipa poremećaja, prelazni procesi su često dosta spori i u nekim slučajevima neprihvatljivi. Zato su sistemi upravljanja u KR dobri kandidati za primjenu. Uzimajući sve ovo u obzir može se zaključiti da su konstantni i sporopromjenljivi vanjski poremećaji dovoljno značajni da iziskuju poseban tretman.

U nastavku biće prikazane metode projektovanja klizne površi za linearne viševarijabilne sisteme upravljanja s poremećajima van kanala upravljanja. Biće posmatrani vektorski konstantni i sporopromjenljivi vanjski poremećaji. Uticaj ovih poremećaja na dinamiku sistema u KR je ocijenjen na osnovu odgovarajuće kriterijalne funkcije ustaljenog stanja. Cilj konstrukcije klizne površi je minimizacija usvojene kriterijalne funkcije.

5.2.1. Projektovanje klizne površi u slučaju poremećaja van kanala upravljanja

Posmatra se sistem opisan modelom (5.1) za slučaj kada nisu ispunjeni uslovi invarijantnosti. Tada vanjski poremećaj $\mathbf{f}(t)$ ne djeluje u opsegu matrice $\mathbf{B}$, tj. $\text{rang}\{\mathbf{D}\} \neq \text{rang}\{\mathbf{B}\}$. Takođe, neka je par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrolabilan i neka je matrica $\mathbf{B}$ punog ranga ($\text{rang}\{\mathbf{B}\} = m$). Neka je klizna površ linearna i definisana kliznom promjenljivom (5.2) i neka važi $\det\{\mathbf{CB}\} \neq m$ i $\text{rang}\{\mathbf{C}\} = m$. Ekvivalentno upravljanje $\mathbf{u}_{eq}(t) = \mathbf{u}_s$ je određeno jednačinom (5.5).

Tada, dinamika punog reda sistema u KR (5.6) se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{eq}\mathbf{f}(t), & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) &= 0, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^{-1}\mathbf{C}, & \mathbf{A}_{eq} &= \mathbf{PA}, & \mathbf{D}_{eq} &= \mathbf{PD}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

gdje matrica $\mathbf{P}$ je projektor matrica i primarno utiče na ponašanje sistema u KR.

Da bi se analizirao uticaj poremećaja na sistem, neophodno je ispitati svojstva projektora $\mathbf{P}$. U [96] je pokazano da matrica $\mathbf{P}$ projektuje na $S_{p1} = \text{null}\{\mathbf{C}\}$ duž $S_{p2} = \text{rang}\{\mathbf{B}\}$. Lahko je pokazati da projektor $\mathbf{P}$ ima m nultih sopstvenih vrijednosti i $(n - m)$ sopstvenih vrijednosti jednakih jedinici. Takođe, očigledno je da važi $\mathbf{CP} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{PB} = \mathbf{0}$. Na osnovu ovoga može se zaključiti da matrica $\mathbf{A}_{eq}$ ima m nultih sopstvenih vrijednosti, jer $\mathbf{CA}_{eq} = \mathbf{CPA} = \mathbf{0}$. Slijedi da je $\text{rang}\{\mathbf{A}_{eq}\} = \mathbf{0}$, pa je $\mathbf{A}_{eq}$ singularna matrica. Preostale $(n - m)$ sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{eq}$ koje su različite od nule definišu dinamiku sistema u KR i moraju biti stabilne.

Kako $\text{rang}\{\mathbf{D}\} \not\subset \text{rang}\{\mathbf{B}\}$, $\mathbf{D}_{eq} \neq \mathbf{0}$ pa poremećaj $\mathbf{D}_{eq}\mathbf{f}$ u (5.17) utiče na dinamiku KR. Pošto je $\mathbf{CD}_{eq} = \mathbf{0}$, onda važi $\text{rang}\{\mathbf{D}_{eq}\} \subset \text{null}\{\mathbf{C}\}$. Originalni opšti poremećaj $\mathbf{d} = \mathbf{D}\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ se može dekomponovati u dvije međusobno ortogonalne komponente, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_m + \mathbf{d}_{um}$. Komponenta $\mathbf{d}_m$ djeluje u pravcu matrice $\mathbf{B}$, tj. $\mathbf{d}_m \in \text{rang}\{\mathbf{B}\}$, dok je komponenta $\mathbf{d}_{um}$ je ortogonalna na $\mathbf{d}_m$. Za nalaženje ove komponente potrebno je odrediti ortogonalnu projektorsku matricu $\mathbf{P}_o = \mathbf{P}_o^\top = \mathbf{P}_o^2$ sa svojstvom $\text{rang}\{\mathbf{P}_o\} = \text{rang}\{\mathbf{B}\}$ i $\text{null}\{\mathbf{P}_o\} = \text{null}\{\mathbf{B}^\top\}$. Može se lahko provjeriti da projektor $\mathbf{P}_o = \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger$ zadovoljava gornje uslove, gdje je $\mathbf{B}^\dagger$ lijeva pseudoinverzna matrica i jednaka je $\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top$.

Komponenta $\mathbf{d}_{um} \in \text{null}\{\mathbf{B}^\top\}$ se može naći korištenjem komplementarnog projektora projektoru $\mathbf{P}_o$, tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{D}\mathbf{f}, & \mathbf{d}_{eq} &= \mathbf{P}\mathbf{d}, & \mathbf{d}_m &= \mathbf{P}_o\mathbf{d}, \\ \mathbf{d}_{um} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_o)\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_m, & \mathbf{d} &= \mathbf{d}_m + \mathbf{d}_{um}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pošto je $\mathbf{d}_m \in \text{rang}\{\mathbf{B}\}$, onda je $\mathbf{P}\mathbf{d}_m = \mathbf{0}$ i dobija se $\mathbf{d}_{eq} = \mathbf{P}\mathbf{d} = \mathbf{P}\mathbf{d}_{um}$. Dakle, ekvivalentni poremećaj $\mathbf{d}_{eq}$ predstavlja projekciju komponente $\mathbf{d}_{um}$ na kliznu površ duž $\text{rang}\{\mathbf{B}\}$. Može se uočiti da $\mathbf{C}\mathbf{d}_{eq} = \mathbf{0}$, što potvrđuje da $\mathbf{d}_{eq} \in \text{null}\{\mathbf{C}\}$. Takođe je interesantno primjetiti da vrijedi $\mathbf{B}^\dagger\mathbf{d}_{um} = \mathbf{0}$.

Neka je vanjski poremećaj konstantan i ograničen vektor $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}$. Onda će trajektorije sistema doći u ustaljeno stanje na kliznoj površi van koordinatnog početka, tj. $\mathbf{x}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$. Primjenjujući ovaj granični proces na (5.17), uz uslov $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$, dobija se:

$$\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{D}_{eq}\mathbf{f}, \quad \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Relacije (5.19) predstavljaju sistem od $n + m$ jednačina s n nepoznatih komponenti stacionarnog stanja $\mathbf{x}(\infty)$. Jedan način nalaženja $\mathbf{x}(\infty)$ je dat u nastavku.

Pod uslovom da je matrica sistema $\mathbf{A}$ nesingularna matrica, jedno rješenje za ustaljeno stanje $\mathbf{x}(\infty)$ sistema (5.17) na kliznoj površi $\mathbf{g} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se može izraziti kao

$$\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{k} - \mathbf{D}\mathbf{f}). \quad (5.20)$$

gdje je $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ neki vektor.

Relacija (5.20) se može dobiti na osnovu (5.19) koja se može prepisati u obliku:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{D}\mathbf{f}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(\infty) \in \text{null}\{\mathbf{C}\}. \quad (5.21)$$

Pošto projektor matrica $\mathbf{P}$ projektuje na $S_{p1} = \text{null}\{\mathbf{C}\}$ duž $S_{p2} = \text{rang}\{\mathbf{B}\}$, (5.21) će biti ispunjena ako $\mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{D}\mathbf{f} \in \text{rang}\{\mathbf{B}\}$. To znači da se vektor $\mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{D}\mathbf{f}$ može izraziti kao $\mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{D}\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{k}$, gdje je $\mathbf{k}$ konstantni vektor. Uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{A}$ regularna, $\mathbf{x}(\infty)$ se može naći kao (5.20). Ne treba zaboraviti da stacionarno stanje (5.20) mora da se nalazi na kliznoj površi, tj. mora zadovoljiti uslov $\mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$.

Projektovanje optimalne klizne površi

Sada se može postaviti zadatak da se konstruiše klizna površ koja će minimizirati osjetljivost ustaljenog stanja na poremećaje van kanala upravljanja. Dakle, optimizacioni kriterijum se može formulisati kao

$$J(\mathbf{x}(\infty)) = \mathbf{x}^\top(\infty) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\infty), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top > \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

gdje je $\mathbf{Q}$ pozitivno definitna simetrična matrica koja se može dekomponovati kao $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1$. Treba primijetiti da za $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, kriterijalna funkcija (5.22) postaje kvadrat Euklidove vektorske norme ustaljenog stanja, tj. $J = \|\mathbf{x}(\infty)\|^2$. Odavde se može zaključiti da minimizacija kriterijalne funkcije minimizira grešku sistema u ustaljenom stanju pod djelovanjem posmatrane klase poremećaja.

Na osnovu ustaljenog stanja (5.20) može se primijetiti da je jedini parametar sa slobodnim izborom vektor $\mathbf{k}$. Dakle, optimizacioni postupak se može sprovesti tako da se najprije pronade vektor $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\min}$ koji će minimizirati (5.22) i na osnovu njega naći minimalno ustaljeno stanje $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_{\min}(\infty)$, a nakon toga naći odgovarajuće $\mathbf{C}$ koje će zadovoljiti jednačinu $\mathbf{C}\mathbf{x}_{\min}(\infty) = \mathbf{0}$.

Opisani optimizacioni postupak je sproveden u [97], a dobijeni rezultati pokazuju da se dinamički sistem (5.1) u KR na površi $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, koji je podvrgnut djelovanju konstantnog poremećaja $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}$ van kanala upravljanja, ostvaruje jedinstveno ustaljeno stanje

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\min}(\infty) &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{D}\mathbf{f}, \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}_s \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{A}_s, \end{aligned} \quad (5.23)$$

kao rezultat minimizacije (5.22), gdje je $\mathbf{A}_s = (\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1}$ regularna simetrična matrica. Klizne površi koje obezbjeđuju minimalno ustaljeno stanje (5.23) definisane su sa

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}_0[\mathbf{H} \ \mathbf{I}], & \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{m \times (n-l)}, \ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times l}, \quad \text{za } l < n - m, \\ \mathbf{C}_0[\mathbf{H} \ \mathbf{I}], & \mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, \quad \text{za } l \geq n - m, \end{cases} \quad (5.24)$$

gdje je $\mathbf{C}_0$ matrica koja se može slobodno izabrati, dok se matrica $\mathbf{H}$ određuje iz uslova $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{D} = \mathbf{0}$ u kojem figuriše $\mathbf{C}$ definisano sa (5.24).

Prikazani rezultat se može primijeniti i u slučaju sporopromjenljivih poremećaja $\mathbf{f}(t)$, kada je dinamika sistema u KR višestruko brža od promjene poremećaja. Pod tim uslovima se može smatrati da će posle kratkog prelaznog režima pretpostavka $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$ važiti, te će sprovedena analiza biti validna i u tom slučaju. Međutim, jasno je da će postojati određena gornja granična frekvencija ω_b promjene poremećaja, do koje je izvedeni rezultat primjenjiv i daje superiornu tačnost. Za to je potrebno imati neko referentno podešenje klizne površi s kojim bi se uporedile performanse predloženog podešenja.

Jedan vrlo dobar način konstrukcije klizne površi je predložen u [93] i vodi se principom da se izborom klizne površi ekvivalentni poremećaj koji utiče na dinamiku KR ne pojača. Tada je rezultujući ekvivalentni poremećaj $\mathbf{d}_{eq}$ jednak delu originalnog poremećaja koji djeluje van kanala upravljanja $\mathbf{d}_{um}$. Iz jednačine $\mathbf{d}_{eq} = \mathbf{d}_{um}$ uz korištenje (5.18) dobija se uslov $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_o$, ili što je ekvivalentno jednačini $\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^+$.

Iz prethodnog se lahko može zaključiti da se podešenjem klizne površi izborom $\mathbf{C}$ kao

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \quad (5.25)$$

ispunjava navedeni uslov.

Međutim, očigledno je da podešenje (5.25) ne dozvoljava podešavanje dinamike sistema u konvencionalnom KR, a samim tim nemoguće je garantovati stabilnost sistema. I pored toga, ovo univerzalno podešenje koje je originalno predloženo za integralne KR, biće upotrebljeno u frekvencijskoj analizi za određivanje granične frekvencije ω_b .

U analizi sistema u frekvencijskom domenu kreće se od primjene Laplasove transformacije na sistem (5.17). U slučaju nultih početnih uslova dobija se jednačina

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{PA})^{-1}\mathbf{PDF}(s) = \mathbf{W}_d(s)\mathbf{F}(s), \quad (5.26)$$

gdje je $\mathbf{W}_d(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{PA})^{-1}\mathbf{PD}$ matrica prenosna funkcija u odnosu na vektor poremećaja. Prelaz u frekvencijski domen se ostvaruje smjenom $s = j\omega$ i pretpostavkom da je ulazni poremećaj sinusoidaln, pa se dobija $\mathbf{X}(j\omega) = \mathbf{W}_d(j\omega)\mathbf{F}(j\omega)$. Kako se radi o linearnom sistemu i komponente vektora stanja sistema će biti sinusoidalne, a samim tim i norma vektora stanja. Kako su od interesa samo amplitude oscilacija promjenljivih stanja, frekvencijska analiza će se nadalje orijentisati samo na njih.

Neka je sa $\mathbf{M}_{\square}(\omega)$ označen vektor ili matrica čiji elementi predstavljaju magnitude elemenata odgovarajućeg vektora ili matrice $\square(j\omega)$. Tada se može pisati $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega) = \mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega)\mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\omega)$.

Do granične frekvencije upotrebljivosti podešenja (5.24) se može doći postavljanjem uslova da norma vektora $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega)$ bude manja ili jednaka od norme koje se dobija referentnim podešenjem (5.25). Dakle, uslov se može formulisati $\|\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega)\|_{C=(5.24)} \leq \|\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega)\|_{C=(5.25)}$ za $0 \leq \omega \leq \omega_b$.

Kako je $\|\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\omega)\| \leq \|\mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega)\| \cdot \|\mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\omega)\|$, prethodni uslov se može svesti na $\|\mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega)\|_{C=(5.24)} \leq \|\mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega)\|_{C=(5.25)}$.

Granična frekvencija se može naći izjednačavanjem indukovanih matičnih normi na toj frekvenciji kao

$$\|\mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega_b)\|_{C=(5.24)} = \|\mathbf{M}_{\mathbf{W}_d}(\omega_b)\|_{C=(5.25)}. \quad (5.27)$$

Podešavanje dinamike u KR

Klizna površ koja minimizira optimizacioni kriterijum, zahtijeva matricu $\mathbf{C}$ u obliku (5.24). Može se primijetiti da postoji algebarsko ograničenje $\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{D} = \mathbf{0}$ koje mora ispuniti ova matrica, što smanjuje stepen slobode prilikom njenog izbora. Vidi se da postoji slobodan izbor jedino matrice $\mathbf{C}_0$, što nameće pitanje može

li se istovremeno ostvariti minimizacija kriterijuma (5.22) i proizvoljno podesiti dinamika sistema u KR, što je primarna funkcija matrice $\mathbf{C}$. Odgovor na ovo pitanje se može naći transformacijom sistema (5.1) u regularnu formu [41], u kojoj se lahko može izdvojiti dinamika KR, koja je redukovanoj reda $n - m$.

Ako se matrica ulaza podijeli kao:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}, \quad \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \det \mathbf{B}_2 \neq 0, \quad (5.28)$$

tada se može primijeniti nesingularna koordinatna transformacija $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, gdje je matrica transformacije data kao

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Transformisani sistem (5.1) u regularnoj formi je:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{f}(t), \\ \bar{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \bar{\mathbf{D}}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Korištenjem koordinatne transformacije, klizna promjenljiva se može napisati kao $\mathbf{g} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$, gdje je $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{C}}_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\bar{\mathbf{C}}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. U KR važi $\bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$, pa se posljednjih m stanja može izraziti kao $\bar{\mathbf{x}}_2 = -\bar{\mathbf{C}}_2^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1$. Korištenjem ovog algebarskog ograničenja u (5.30), dobija se redukovana dinamika sistema u KR kao:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1(t) &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \bar{\mathbf{C}}_2^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1) \bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}_r(\bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{f}(t), \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) &= -\bar{\mathbf{C}}_2^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ako je par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrolabilan, onda je kontrolabilan i par $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12})$, pa se sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_r(\bar{\mathbf{C}})$ mogu podešavati izborom matrice $\bar{\mathbf{C}}$, odnosno $\mathbf{C}$. Matrica $\mathbf{C}$ se ne može u potpunosti proizvoljno birati, usljed algebarskog uslova (5.24), redukujući slobodni izbor samo na $\mathbf{C}_0$. Jasno je onda da se jedino ovom matricom može uticati na dinamiku sistema u KR.

Dimenzije matrice $\mathbf{C}_0$ zavise od l i m , pa mogućnost projektovanja dinamike u KR zavisi od dimenzija vektora poremećaja i upravljanja. U [97] su detaljno analizirane ove mogućnosti, a najvažniji rezultati biće sumirani ovdje.

Naime, u sistemu (5.1) u kome se zahtijeva optimalno ustaljeno stanje (5.23) u KR, dinamika sistema u KR se ne može podešavati ukoliko je $l \geq n - m$. Tada je dinamika KR definisana matricom $\mathbf{A}_r$ sistema redukovano reda koja je bliska:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1, \quad \mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2, \\ \mathbf{S} &= [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2], \quad \mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, \quad \mathbf{S}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}, \quad \mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Na osnovu prethodnog se može zaključiti da mogućnost podešavanja dinamike u KR s optimalnim stacionarnim stanjem postoji u slučaju $l < n - m$. U nastavku se analizira u kojoj mjeri je moguć slobodan izbor sopstvenih vrijednosti sistema redukovano reda. Matrica $\bar{\mathbf{C}}$ u sistemu (5.31) mora istovremeno da zadovolji u ovom slučaju tri zahtjeva:

- 1) da obezbijedi $n - m$ željenih sopstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}_r(\bar{\mathbf{C}})$,
- 2) da obezbijedi decantralizovano upravljanje u sistemima s više ulaza što se ostvaruje zahtjevom $\mathbf{C}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{I} \Rightarrow \bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{I}$,
- 3) da obezbijedi dosezanje optimalnog ustaljenog stanja kroz zahtjev $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \mathbf{C}_0[\mathbf{H} \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_0\mathbf{S}$, gdje je $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{(n-l) \times n}$.

Prva dva zahtjeva su standardni u sistemima upravljanja s KR, dok je treći posljedica sprovedene optimizacije. Drugi zahtjev nameće uslov $\bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{I}$, a ispunjenje trećeg zahtjeva se ogleda kroz postojanje jedinstvenog rešenja jednačine $\mathbf{C}_0\mathbf{S} = \bar{\mathbf{C}}$ po nepoznatoj matrici $\mathbf{C}_0$.

U [97] je pokazano da matrica $\bar{\mathbf{C}}$ koja obezbjeđuje $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ i rješivost jednačine $\mathbf{C}_0\mathbf{S} = \bar{\mathbf{C}}$ po nepoznatoj matrici $\mathbf{C}_0$ je oblika

$$\bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_s \quad \bar{\mathbf{C}}_e \quad \mathbf{I}], \tag{5.33}$$

gdje je $\bar{\mathbf{C}}_s \in \mathbb{R}^{m \times l}$ matrica čije se vrste $\bar{\mathbf{c}}_{si}$ nalaze iz uslova $\text{rang} \left\{ [\mathbf{S}^\top \quad \bar{\mathbf{c}}_{si}^\top] \right\} = n - l$ ($i = 1, \dots, m$). Matrica $\bar{\mathbf{C}}_e \in \mathbb{R}^{m \times (n-m-l)}$ se može proizvoljno birati.

Na osnovu prethodnog se može zaključiti da dimenzije matrice $\bar{\mathbf{C}}_e$ definišu broj stepeni slobode u podešavanju $n - m$ sopstvenih vrijednosti sistema. Uzimajući u obzir prikazane rezultate, mogućnost nezavisnog podešavanja dinamike sistema u KR s optimizovanom kliznom površi u zavisnosti od dimenzija vektora ulaza i poremećaja je sumirana u sljedećoj tabeli.

Tabela 5.1.: Podešavanje spektra sopstvenih vrijednosti u zavisnosti od l , n i m

$l \geq n - m$	$l < n - m$	
	$m(n - m - l) \geq n - m$	$m(n - m - l) < n - m$
Dinamika sistema u KR je predefinisana sa (5.32) za bilo koje $\mathbf{C}_0$ i ne može se specificirati.	Cjelokupni spektar sopstvenih vrijednosti se može specificirati (svih $n - m$ sopstvenih vrijednosti se mogu proizvoljno birati)	$m(n - m - l)$ sopstvenih vrijednosti se mogu proizvoljno izabrati, dok za preostale postoje algebarske veze.

U slučaju $l < n - m$, matrica $\mathbf{C}$ koja definiše kliznu površ se određuje na osnovu izraza

$$\mathbf{C} = [\bar{\mathbf{C}}_s \quad \bar{\mathbf{C}}_e \quad \mathbf{I}] \mathbf{S}^\dagger [\mathbf{H} \quad \mathbf{I}], \quad (5.34)$$

gdje je $\mathbf{S}^\dagger$ pseudoinverzna matrica matrice $\mathbf{S}$. Matrica $\bar{\mathbf{C}}_s$ se nalazi iz uslove ranga (5.33), dok se elementi matrice $\bar{\mathbf{C}}_e$ nalaze iz (5.31) za dati spektar sopstvenih vrijednosti.

Slučaj skalarnog poremećaja je razmatran u naučnom radu [98]. Identifikovana su tri slučaja pri podešavanju dinamike kliznog režima: regularni $1 < m < n - 1$, gdje se dinamika može slobodno birati, singularni $m = n - 1$, gdje je dinamika unaprijed određena uslovom minimalne stacionarne norme, te skalarni slučaj ($m = 1$), gdje se javlja ograničenje između vlastitih vrijednosti definisano izvedenim uslovom.

Validnost razmatranih pristupa potvrđena je kroz numeričke primjere koji ilustruju postupak konstruisanja klizne površi na osnovu optimizacije ustaljenog stanja, pri čemu se za različite odnose dimenzija sistema i upravljanja određuju matrice transformacije, oblik matrice $\mathbf{C}$ kao i pripadajuća dinamika redukovano reda. Prva dva primjera pokazuju slučajeve u kojima je moguće potpuno ili djelimično zadati spektar sopstvenih vrijednosti u KR, dok treći primjer dodatno razmatra frekvencijsko područje primjenljivosti i simulacionu provjeru dobijenih rješenja. U posljednjem primjeru predloženi pristup se upoređuje s PI regulatorom, čime se potvrđuje efikasnost predloženog pristupa.

Primjer 5.1

Neka su u posmatranom sistemu (5.1) date sljedeće matrice modela:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & 8 & 4 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Može se uočiti da je $n = 4$, $m = 2$ i $l = 3$, te u tom slučaju važi $l \geq n - m$ što odgovara slučaju kada je dinamika sistema u KR u potpunosti predodređena optimizacionim zahtjevom i data je sa (5.32). Matrica $\mathbf{C}$ se na osnovu (5.24) može izraziti kao

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{C}_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(-2c_{13} - c_{14}) & \frac{1}{12}(8c_{13} - 113c_{14}) & c_{13} & c_{14} \\ \frac{1}{6}(-2c_{23} - c_{24}) & \frac{1}{12}(8c_{23} - 113c_{24}) & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \quad (\star)$$

Relevantne matrice neophodne za proračun dinamike redukovanog reda u KR su date sa

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{113}{12} & -\frac{31}{4} & -\frac{67}{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1.7 & 1 \\ 2.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 23.9 & 41.2 \\ 4.8 & 6.4 \end{bmatrix}$$

Dinamika sistema u KR je definisana sopstvenim vrijednostima matrice $\mathbf{A}_r$

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 3.03 & -39.17 \\ 2.52 & -7.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \in \{-2.083 \pm j8.525\} \quad (\star\star)$$

Može se provjeriti da će svako $\mathbf{C}$ iz beskonačnog skupa matrica $(\star)$, koje obezbjeđuje minimizaciju norme ustaljenog stanja, rezultirati istom dinamikom redukovanog reda $(\star\star)$.

Ako se nađe ekvivalentna matrica $\mathbf{A}_{eq}$ iz (5.17) dobija se

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} -3.77 & 0.92 & -1.87 & 8.06 \\ -0.83 & 0 & -0.28 & -0.14 \\ 0.71 & 0.31 & -0.44 & 2.78 \\ -8.42 & 0.15 & -2.91 & 0.04 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda \in 0, 0, -2.083 \pm j8.525$$

pri čemu se vidi da u njoj nema podešljivih parametara i da nenulte sopstvene vrijednosti odgovaraju sopstvenim vrijednostima matrice $\mathbf{A}_r$ date s (★★).

Primjer 5.2

Neka su sada matrice sistema (5.1) date sa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 5 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 4 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 5 \\ 4 & -6 & 7 & -9 & -7 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 9 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -2 \\ 3 & 8 \\ -7 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Kako je $n = 6$, $m = 3$ i $l = 2$, važi nejednačina $l < n - m \leq m(n - m - l)$. U ovom slučaju kompletan spektar sopstvenih vrijednosti u KR se može proizvoljno izabrati. Na osnovu zahtjeva (5.12) pojavljuju se algebarska ograničenja u matrici $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{C}_0], \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.08 \\ -0.24 & -0.97 \\ 0.37 & -0.47 \\ 1.37 & 2.17 \end{bmatrix}.$$

Neophodne matrice za transformaciju sistema u regularnu formu su

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -19.21 & 18.93 & -4.79 \\ -29.1 & 34.96 & -14.9 \\ -62.96 & 81.34 & -24.03 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -234.97 & -418.65 & -52.65 \\ -525.48 & -894.83 & -181.83 \\ -1135.17 & -1638.72 & -299.72 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.08 & 1 & -3.6 & 5.88 & 9.69 \\ -0.24 & -0.97 & 0 & 5.76 & -4.51 & -2.52 \\ 0.37 & -0.47 & 0 & 1.37 & 8.21 & -1.69 \\ 1.37 & 2.17 & 0 & 10.37 & -2.43 & 22.16 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_s & \bar{\mathbf{C}}_e & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & \bar{c}_{14} & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{24} & \bar{c}_{25} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & \bar{c}_{35} & \bar{c}_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{r1} \\ \bar{\mathbf{C}}_{r2} \\ \bar{\mathbf{C}}_{r3} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\bar{\mathbf{C}}_s$ se određuje iz rang uslova (5.33). Za prvi uslov se dobija

$$\text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{S}^\top & \bar{\mathbf{C}}_{r1}^\top \end{bmatrix} \right\} = \text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} 0.4 & -0.24 & 0.37 & 1.37 & \bar{c}_{11} \\ -0.08 & -0.97 & -0.47 & 2.17 & \bar{c}_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{13} \\ -3.6 & 5.76 & 1.37 & 10.37 & \bar{c}_{14} \\ 5.88 & -4.51 & 8.21 & -2.43 & \bar{c}_{15} \\ 9.7 & -2.5 & -1.69 & 22.16 & \bar{c}_{16} \end{bmatrix} \right\} = 4.$$

odakle se nalazi

$$\bar{c}_{11} = -0.369\bar{c}_{13} + 0.024\bar{c}_{14} + 0.053\bar{c}_{15} + 0.056\bar{c}_{16},$$

$$\bar{c}_{12} = -1.868\bar{c}_{13} - 0.109\bar{c}_{14} - 0.008\bar{c}_{15} + 0.148\bar{c}_{16}.$$

$$\bar{c}_{21} = -0.369\bar{c}_{23} + 0.024\bar{c}_{24} + 0.053\bar{c}_{25} + 0.056\bar{c}_{26},$$

$$\bar{c}_{22} = -1.868\bar{c}_{23} - 0.109\bar{c}_{24} - 0.008\bar{c}_{25} + 0.148\bar{c}_{26},$$

$$\bar{c}_{31} = -0.369\bar{c}_{33} + 0.024\bar{c}_{34} + 0.053\bar{c}_{35} + 0.056\bar{c}_{36},$$

$$\bar{c}_{32} = -1.868\bar{c}_{33} - 0.109\bar{c}_{34} - 0.008\bar{c}_{35} + 0.148\bar{c}_{36}.$$

Pošto je $\bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{I}_3$, preostali dio matrice $\bar{\mathbf{C}}$, čini $\bar{\mathbf{C}}_e$, koja se može proizvoljno izabrati. Njeni elementi se nalaze na osnovu željenih sopstvenih vrijednosti. Neka je željeni spektar u KR dat sa $\lambda \in \{-1, -2, -3\}$. Tada se dobija $\bar{c}_{13} = 0.439$, $\bar{c}_{23} = 0.221$ i $\bar{c}_{33} = -0.359$.

Na kraju, matrica $\mathbf{C}$ se dobija kao

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{S}^* \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.138 & -0.93 & 0.439 & 0.655 & 0.011 & -0.117 \\ -0.029 & -0.421 & 0.221 & 0.236 & 0.074 & -0.064 \\ 0.189 & 0.82 & -0.359 & -0.497 & 0.028 & 0.148 \end{bmatrix}.$$

Provjera ispravnosti postupka se opet vrši preko ekvivalentne matrice, koja se dobija u obliku

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} -4.46 & 3.88 & 2.49 & 0.95 & 4.62 & -0.65 \\ -1.07 & 19.65 & 13.07 & -30.36 & 42.08 & 5.35 \\ -5.49 & 43.16 & 26.6 & -52.38 & 83.64 & 1.78 \\ 1.58 & -2.11 & -0.32 & -3.83 & -0.13 & 4.47 \\ 5.72 & -19.6 & -11.64 & 16.86 & -34.09 & 3.06 \\ 2.5 & -12.36 & -9.9 & 23.73 & -29.94 & -9.86 \end{bmatrix},$$

čije sopstvene vrijednosti $\lambda \in \{0, 0, 0, -1, -2, -3\}$ odakle se vidi da nenulte sopstvene vrijednosti odgovaraju željenim sopstvenim vrijednostima.

Primjer 5.3

U ovom primjeru se posmatra sistem (5.1) sa skalarnim upravljanjem koga definišu sljedeće matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ovdje je $n = 3$, $m = 1$ i $l = 1$, pa važi $l < n - m$ i $m(n - m - l) < n - l$. U ovom slučaju se ne može izabrati kompletna dinamika sistema u KR, već proizvoljno $m(n - m - l) = 1$ sopstvenih vrijednost, a druge su algebarski uslovljene.

Optimizacija ustaljenog stanja nameće

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{C}_0], \quad \mathbf{C}_0 = [c_2 \quad c_3], \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -10/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}.$$

Matrice za dobijanje opisa sistema (5.31) su

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2] = \begin{bmatrix} -10/7 & 1 & 1 \\ 2/7 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3].$$

Zahtjev $\bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{I}_1$ daje $\bar{c}_3 = 1$.

Spektar sopstvenih vrijednosti $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ definiše redukovanu dinamiku (5.31), odakle se $\bar{\mathbf{C}}$ može naći kao

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 3 + \lambda_1 + \lambda_2 & -(2 + \lambda_1)(2 + \lambda_2) & 1 \end{bmatrix}.$$

Međutim, uslov ranga iz (5.33) zahtijeva $\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{S}^\top & \bar{\mathbf{C}}^\top \end{bmatrix} \right\} = 2$, što nameće vezu između sopstvenih vrijednosti

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -10/7 & 2/7 & 3 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 & 0 & -(2 + \lambda_1)(2 + \lambda_2) \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

odakle se kao rješenja dobijaju

$$\lambda_2 = -\frac{9(1 + \lambda_1)}{9 + 8\lambda_1}, \quad i \quad \lambda_1 \neq -\frac{9}{8}.$$

Matrica $\mathbf{C}$ se nalazi kao $\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$ što za proizvoljno odabrano λ_1 daje

$$\mathbf{C} = \frac{1}{9 + 8\lambda_1} \begin{bmatrix} 2(3 + 2\lambda_1)^2 & -(2 + \lambda_1)(9 + 7\lambda_1) & -(27 + \lambda_1(31 + 7\lambda_1)) \end{bmatrix}. \quad (\star)$$

Može se provjeriti da dobijena matrica $\mathbf{C}$ zadovoljava optimizacioni uslov $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{D} = 0$. Takođe, ekvivalentna matrica $\mathbf{A}_{eq}$ ima sopstvene vrijednosti $\lambda \in \{0, \lambda_1, -9(1 + \lambda_1)/(9 + 8\lambda_1)\}$, što potvrđuje ispravnost procedure.

Interesantno je odrediti frekvencijski opseg primjenljivosti prezentirane metode na ovom primjeru u slučaju vremenski promjenljivog poremećaja. Dakle, treba naći graničnu frekvenciju učestanost ω_b sinusoidalnog poremećaja za koje podešenje $(\star)$ daje bolje rezultate od referentnog podešenja (5.25) iz [93], a koje daje $\mathbf{C} = [0 \ 0.5 \ -0.5]$ pri čemu nema izbora dinamike KR.

Ako se izabere $\lambda_1 = -2$, dobija se $\lambda_2 = -9/7$ i $\mathbf{C} = [-2/7 \ 0 \ -1]$. Da bi se primijenila jednačina (5.27), neophodno je izračunati $\mathbf{W}_d(j\omega)$ za različita podešenja klizne površi

$$\|\mathbf{W}_d(j\omega)\|_{\mathbf{C}=[-2/7 \ 0 \ -1]} = \mathbf{M}_{w_1}(\omega) = \begin{bmatrix} 7\sqrt{\frac{1}{81 + 49\omega^2}} \\ \sqrt{\frac{400 + 81\omega^2}{324 + 277\omega^2 + 49\omega^4}} \\ 2\sqrt{\frac{1}{81 + 49\omega^2}} \end{bmatrix},$$

$$\|\mathbf{W}_d(j\omega)\|_{\mathbf{C}=[0 \ 0.5 \ -0.5]} = \mathbf{M}_{w_2}(\omega) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{25 + 4\omega^2}{9 + 4\omega^2(6 + \omega^2)}} \\ \sqrt{\frac{4 + \omega^2}{9 + 4\omega^2(6 + \omega^2)}} \\ \sqrt{\frac{4 + \omega^2}{9 + 4\omega^2(6 + \omega^2)}} \end{bmatrix}.$$

Norme ovih vektora se dobijaju kao

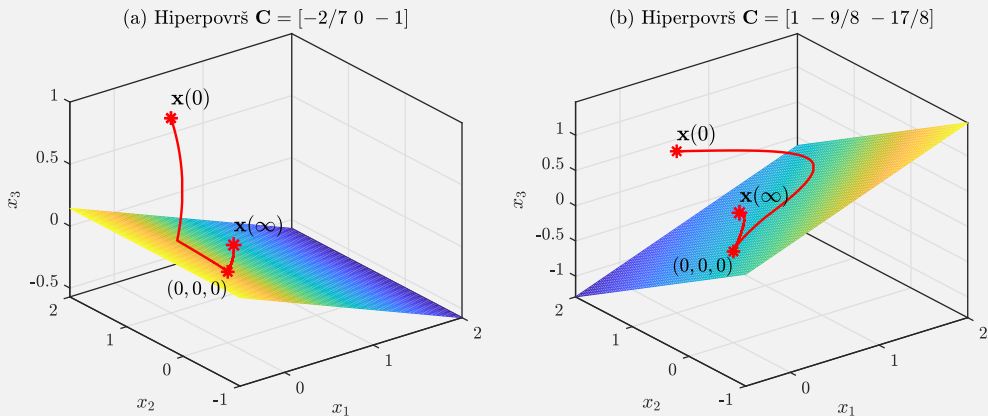
$$\|\mathbf{M}_{w_1}(\omega)\| = \sqrt{\mathbf{M}_{w_1}^\top(\omega)\mathbf{M}_{w_1}(\omega)} = \sqrt{\frac{612 + 134\omega^2}{324 + 277\omega^2 + 49\omega^4}},$$

$$\|\mathbf{M}_{w_2}(\omega)\| = \sqrt{\mathbf{M}_{w_2}^\top(\omega)\mathbf{M}_{w_2}(\omega)} = \sqrt{\frac{33 + 6\omega^2}{9 + 4\omega^2(6 + \omega^2)}}.$$

Rješavajući (5.27) korištenjem posljednje relacije dobija se šest rješenja za kritičnu frekvenciju $\omega_b \in \{\pm j2.39968, \pm j2.205, \pm 0.874708\}$, od kojih je samo realno pozitivno rješenje $\omega_b = 0.874708$ rad/s prihvatljivo. Dakle, za frekvencije poremećaja niže od ω_b predloženi način konstrukcije klizne površi daje veću preciznost.

Za konstantan poremećaj $\omega = 0$, koji na primjer ima jediničnu vrijednost, važi $\|\mathbf{M}_X(0)\| = \|\mathbf{M}_{w_d}(0)\|$, pri čemu je $\|\mathbf{M}_X(0)\| = \|\mathbf{x}(\infty)\|$. Za $\omega = 0$ na osnovu gornjih relacija dobijaju se norme $\|\mathbf{M}_{w_1}(0)\| = 1.37437$ i $\|\mathbf{M}_{w_2}(0)\| = 1.91485$. Identična minimalna norma ustaljenog stanja $\|\mathbf{x}(\infty)\| = 1.37437$ se dobija korištenjem (5.23) za jedinični poremećaj, što potvrđuje ispravnost frekvencijske analize.

Nakon konstruisane klizne površi koja minimizira zadati kriterijum, neophodno je odrediti upravljanje koje obezbjeđuje doseganje i egzistenciju KR, u cilju simulacionih ispitivanja. U ovom primjeru može se primijeniti jednostavno upravljanje oblika $u = -(\mathbf{CB})^{-1}(\mathbf{CA}\mathbf{x} + \alpha \text{sign}(g))$. Ukoliko je poremećaj oblika $f(t) = h(t - 6)$, prekidačko pojačanje $\alpha = 3$ obezbjeđuje nastanak i egzistenciju KR. Iako ovaj zakon upravljanja sadrži izraženu prekidačku komponentu što u realnim sistemima uzrokuje treperenje, njegova primjena ima svrhu da se obezbijedi kretanje što bliže idealnom KR koji je pretpostavka sprovedene analize. Dvije klizne površi koje minimiziraju normu ustaljenog stanja su projektovane. Prva je određena za $\lambda_1 = -2$, što uslovljava $\lambda_2 = -9/7$ i daje $\mathbf{C} = [-2/7 \ 0 \ -1]$. Za drugu kliznu površ uzete su konjugovano kompleksne sopstvene vrijednosti, gdje je izabran realni dio -1 i dobijen je uslovljen par $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}/4$. Odgovarajuća površ je definisana s $\mathbf{C} = [1 \ -9/8 \ -17/8]$.

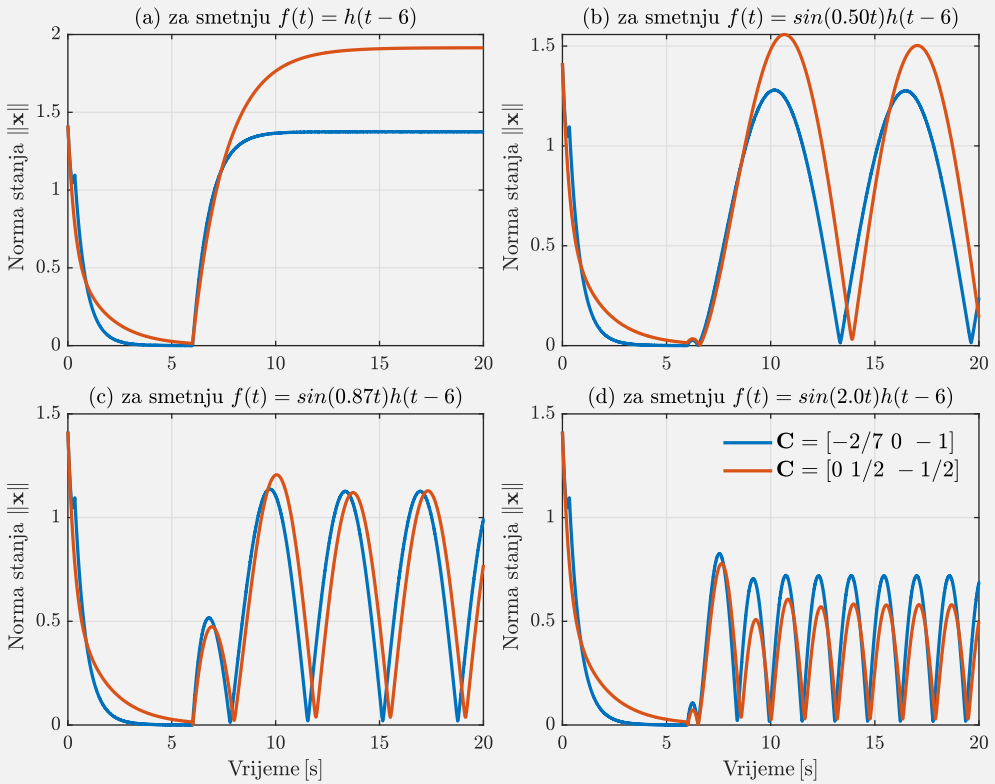


Slika 5.1. Trajektorije sistema za dvije minimizujuće površi

Na slici 5.1 je prikazana simulacija trajektorija sistema za obje klizne površi iz početnog stanja $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1 \ 1]^T$. Vidi se da trajektorije klize duž odgovarajućih ravni do koordinatnog početka. Nakon djelovanja poremećaja van kanala

upravljanja, stanje sistema je izbačeno iz ravnotežnog stanja duž odgovarajućih ravni do istog novog ustaljenog stanja. Analiza podataka potvrđuje da je ostvareno minimalno ustaljeno stanje (5.23) $\mathbf{x}_{min}(\infty) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & 10 & -2 \end{bmatrix}$, koje daje normu $\|\mathbf{x}(\infty)\| = 1,37437$.

Da je zaista ostvareno ustaljeno stanje minimalno, izvršena je simulacijska provjera s metodom predloženim u [93], koji je opisan sa (5.25) i daje $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$.



Slika 5.2. Norme vektora stanja za različito definisane klizne površi i različite smetnje

Za to podešenje se dobijaju sopstvene vrijednosti $\lambda_1 = -0.63$ i $\lambda_2 = -2.37$, a preračunata vektorska norma ustaljenog stanja $\|\mathbf{x}(\infty)\| = 1.915$ je manja od ostvarene minimalne norme predloženog metoda. Simulacioni rezultati prikazani na slici 5.2(a) to potvrđuju.

Slika 5.2(b) prikazuje simulacijske rezultate za sporopromjenljivi sinusoidalni poremećaj, frekvencije manje od granične, gdje predloženi metod i dalje postiže bolje rezultate. Na graničnoj frekvenciji (slika 5.2(c)) oba podešenja imaju iden-

tičnu tačnost. Za dalje povećanje frekvencije, predložena metoda konstrukcije klizne površi je manje pogodna, jer dinamika sistema u KR nije više značajnije brža od poremećaja, što se može vidjeti na slici 5.2(d), gdje podešenje (5.25) daje bolje rezultate.

Primjer 5.4

Budući da PI regulator uspješno otklanja konstantne poremećaje, u ovom primjeru se porede njegove performanse s performansama prikazanog pristupa zasnovanog na KR. Posmatra se regulacioni problem gdje je model sistema dat u kontrolabilnoj kanonskoj formi

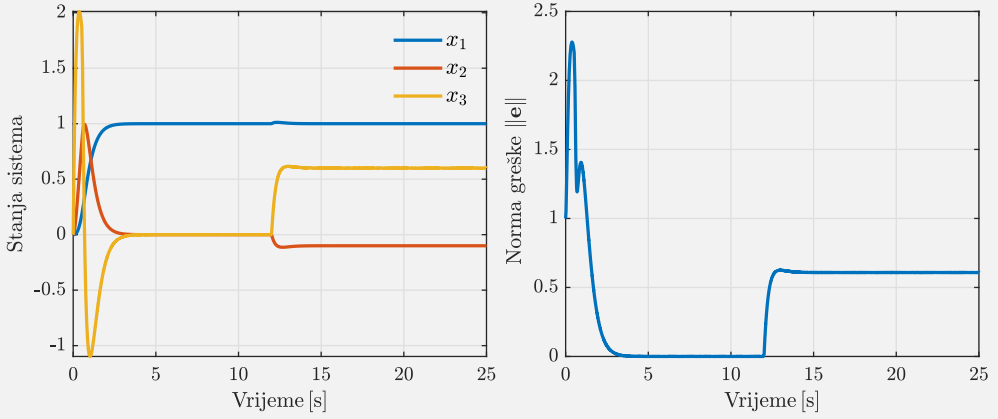
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u(t) + \mathbf{f}_m(t)) + \mathbf{D}f(t), \quad y(t) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t),$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak je regulisati izlaz da dostigne i održava referentnu vrijednost $y_r = 1$. Na sistem djeluje poremećaj u kanalu upravljanja $f_m(t) = 2 \sin(\pi t)$ i van kanala upravljanja $f(t) = h(t - 12)$. Kako je $y = x_1$, vektor greške je $\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - y_r & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}$. Za kontrolu biće upotrijebljen regulator promjenljive strukture iz prethodnog primjera s prekidačkim pojačanjem $\alpha = 15$.

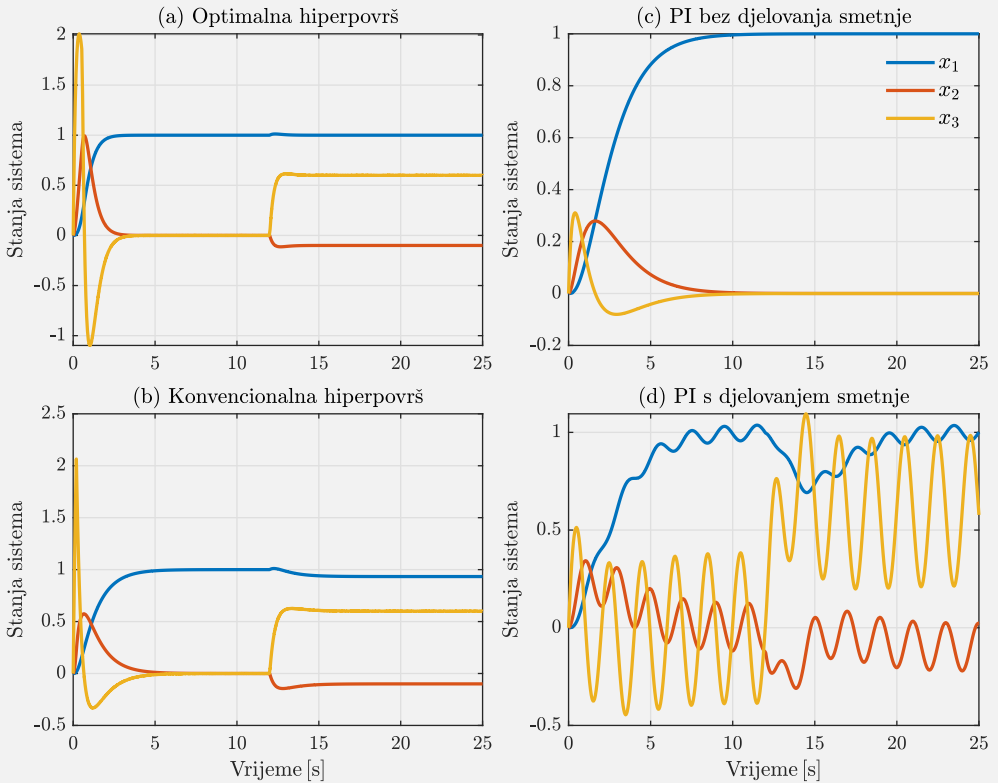
Na osnovu (5.23) izračunato je ustaljeno stanje $\mathbf{e}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$, odnosno $\mathbf{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$, koje ima minimalnu normu $e(\infty) = 0.608$. U konstrukciji klizne površi koja ostvaruje ovu minimalnu normu dobijeno je ograničenje sopstvenih vrijednosti oblika $\lambda_2 = -(6 + \lambda_1)$. Za izabrano $\lambda_1 = -3$ dobija se $\lambda_2 = -3$ i matrica $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Koordinate stanja i norma vektora greške je prikazana na slici 5.3. Vidi se da je sistem neosjetljiv na poremećaj iz kanala upravljanja, a da za poremećaj van kanala upravljanja ostvaruje predviđenu preciznost. Važno je primijetiti da je ostvarena nulta greška u ustaljenom stanju za prvu koordinatu stanja. Ovo svojstvo je ostvareno zahvaljujući predstavljenoj metodi projektovanja klizne površi.



Slika 5.3. Odziv sistema s KR na optimalnoj površi

Može se pokazati da ova metoda projektovanja uvek ostvaruje nultu grešku za prvu koordinatu stanja kada je sistem predstavljen u kontrolabilnoj kanonskoj formi.



Slika 5.4. Poređenje odziva sistema za različite strukture regulatora

To znači da je prva koordinata stanja, koja je obično izlaz u mnogim sistemima, potpuno neosjetljiva na konstantni vanjski poremećaj u KR na optimalnoj kliznoj površi, što se može vidjeti na slici 5.4(a). Da bi se uočila razlika u odnosu na konvencionalnu kliznu površ, prikazan je odziv za površ definisanu s $C = [3 \ 4 \ 1]$ na slici 5.4(b), koja daje sopstvene vrijednosti $\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = -1$. Kao što je očekivano, postoji greška izlaznog signala.

U cilju poređenja, konvencionalni PI regulator $G(s) = k_p(1 + 1/T_i s)$ je isprojektovan. Da bi bio uporediv s regulatorima promjenljive strukture, projektni zahtjev je dobiti što je moguće brži odziv. Prenosa funkcija objekta upravljanja je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Projektni zahtjev se može ostvariti skraćivanjem najsporijeg pola $s = -1$, što se postiže parametrizacijom regulatora $k_p = 2.1126$ i $T_i = 1$ s. Rezultujući spektar spregnutog sistema je $\lambda \in \{-0.785, -0.785, -3.43\}$. Odziv izlaza sistema s PI regulatorom bez djelovanja poremećaja je prikazan na slici 5.4(c). Odziv je značajno sporiji zbog prisustva integralnog djelovanja. U slučaju djelovanja poremećaja, slika 5.4(d), vidi se da PI regulator ima lošije performanse u odnosu na sinusoidalni poremećaj.

Može se zaključiti da regulator promjenljive strukture s optimalnom kliznom površi ostvaruje brz odziv, neosjetljivost na sinusoidalni poremećaj u kanalu upravljanja i nultu grešku izlaza u ustaljenom stanju. Zato se može smatrati da je regulator promjenljive strukture s optimalnom kliznom površi superiorni izbor u ovom zadatku upravljanja u odnosu na konvencionalni PI regulator.

5.2.2. Projektovanje integralne klizne površi u slučaju poremećaja van kanala upravljanja

Prethodna metoda projektovanja optimalne klizne površi za konstantne poremećaje van kanala upravljanja, koja je namijenjena za klasične KR, posjeduje dva uočljiva nedostatka. Najprije, za implementaciju metode neophodna je invertibilnost matrice sistema A , što nije uvek slučaj u praksi. Takođe, pokazano je da postoje slučajevi kada nije moguće uopšte, ili u potpunosti specificirati dinamiku sistema u KR, što je osnovni zadatak projektovanja klizne površi.

U potrazi za prevazilaženjem ovih ograničenja, tj. za mogućnošću da se kliznom površi istovremeno obezbijedi minimizacija kriterijalne funkcije i željena dinamika sistema u KR, u naučnom radu [76] su se analizirali ovi zahtjevi u slučaju integralnih KR. Pokazano je da integralna klizna površ nudi dovoljno stepeni slobode da omogućiti postizanje oba cilja. Takođe, u [76] je razvijena nova optimizaciona procedura za isti optimizacioni problem, koja prevazilazi problem singularnosti matrice sistema $\mathbf{A}$.

Data je odgovarajuća metoda projektovanja integralne klizne površi za slučaj konstantnih i sporopromjenljivih poremećaja van kanala upravljanja, koja će ovde biti predstavljena.

Neka se posmatra linearni dinamički sistem oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t), \quad (5.35)$$

gdje su $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ($m < n$) i $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ vektori stanja, upravljanja i vanjskog poremećaja, respektivno. Poremećaj ima ograničenu normu $\|\mathbf{d}(t)\| \leq d_m$, $\forall t$. Neka važe sljedeće pretpostavke:

1. Neka je $\text{rang}\{\mathbf{A}\} = r \leq n$ i $\text{rang}(\mathbf{B}) = m$.
2. Neka je par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ potpuno kontrolabilan, što podrazumijeva $r + m \geq n \Rightarrow r \geq n - m$.
3. Neka je $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}$ nepoznati konstantni poremećaj van kanala upravljanja $\text{rang}\{\mathbf{B}\} < \text{rang}\{[\mathbf{B} \ \mathbf{d}]\}$.

Već je ranije pokazano da će djelovanje konstantnog poremećaja van kanala upravljanja na sistem usloviti da trajektorije sistema dođu u ustaljeno stanje na kliznoj površi van koordinatnog početka $\mathbf{x}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$. Primjenjujući uslov da je $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ na (5.35) dobija se

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\infty), \mathbf{u}(\infty)) = \mathbf{A} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\infty) + \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Ovdje je zadatak optimizirati kriterijalnu funkciju (5.22) pod algebarskim ograničenjem (5.36). Očigledno je da je za nalaženje ustaljenog stanja iz (5.36) potrebna invertibilnost matrice $\mathbf{A}$. Kako prva pretpostavka dozvoljava da ova matrica bude singularna, potrebno je naći drugi način za nalaženje $\mathbf{x}(\infty)$.

Za prevazilaženje problema singularnosti matrice stanja koristiće se SVD (singular value) dekompozicija. Primjenom SVD na matricu $\mathbf{B}$ dobija se

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_d = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}, \quad (5.37)$$

gdje su $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ unitarne matrice, a $\mathbf{\Sigma}_d$ je nesingularna dijagonalna matrica koja se sastoji od m singularnih vrijednosti $\mathbf{B}$.

Zamjenom (5.37) u (5.36) i množenjem rezultata s $\mathbf{U}^\top$ s lijeve strane dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\top \mathbf{u}(\infty) + \mathbf{U}^\top \mathbf{d} &= 0, & \mathbf{U}^\top \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\top &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{U}^\top \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

gdje su $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$, $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Na ovaj način se ograničenje (5.36) dekomponuje u

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}(\infty), \mathbf{u}(\infty)) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(\infty) + \mathbf{d}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_2(\mathbf{x}(\infty)) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ova ograničenja treba uzeti u obzir prilikom minimizacije kriterijalne funkcije. Slijedi da funkcija Hamiltona [99] postaje

$$F(\mathbf{x}(\infty), \mathbf{u}(\infty), \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = J(\mathbf{x}(\infty)) + \mathbf{l}_1^\top \mathbf{h}_1(\mathbf{x}(\infty), \mathbf{u}(\infty)) + \mathbf{l}_2^\top \mathbf{h}_2(\mathbf{x}(\infty)), \quad (5.40)$$

gdje su $\mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ dva Lagranžova multiplikatorska vektora. Optimizacija kriterijalne funkcije (5.22), odnosno funkcije Hamiltona (5.40), sprovedena je u [76].

Dobijeni rezultati pokazuju da jedinstveno ustaljeno stanje $\mathbf{x}(\infty)$ i odgovarajuće upravljanje $\mathbf{u}(\infty)$ sistema (5.35), pod prethodno datim pretpostavkama minimiziraju optimizacioni kriterijum (5.22) uz ograničenja (5.39), su određeni kao

$$\mathbf{u}_{\min}(\infty) = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_0^{-1} & \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_1^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_1^\top)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top \mathbf{d}, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{x}_{\min}(\infty) = \mathbf{P}_x \mathbf{d}, \quad \mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_1^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_1^\top)^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top. \quad (5.42)$$

Važno je istaći da je ustaljeno stanje (5.42) najbolje moguće stanje sistema (5.35) za definisani kriterijum, bez obzira na algoritam upravljanja ili ostvarenu dinamiku spregnutog sistema. To znači da ukoliko bilo koji regulator ostvari to stanje, moraće na svom izlazu da ima vrijednost (5.41) i obrnuto.

Takođe je interesantno testirati dobijene rezultate za poremećaj koji djeluje u kanalu upravljanja. U tom slučaju može se pisati da je $\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{j}$, gdje je $\mathbf{j}$ neki vektor. Može se lahko vidjeti iz (5.41) i (5.42) da se tada može ostvariti ustaljeno stanje $\mathbf{x}_{\min}(\infty) = \mathbf{0}$, a upravljanje je bilo $\mathbf{u}_{\min}(\infty) = -\mathbf{j}$. Ovo ukazuje na činjenicu da uslovi invarijantnosti imaju širi značaj od SUPS. Drugim riječima, nulto ustaljeno stanje pod djelovanjem poremećaja van kanala upravljanja nije moguće ostvariti bilo kojim upravljanjem.

5.2.3. Projektovanje optimalne integralne klizne površi

Integralni KR [64] se organizuje duž klizne površi $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, koja je definisana sa

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) - \mathbf{D}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{E}\mathbf{x}(\tau) d\tau, \quad (5.43)$$

gdje su matrice $\mathbf{D}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ punog ranga i potrebno ih je odrediti u proceduri projektovanja integralne klizne površi. Integralnim KR se eliminiše faza dosezanja KR u kojoj je sistem osjetljiv na obje vrste poremećaja u pogledu prostora matrice $\mathbf{B}$. To se može lahko uvidjeti iz (5.43), jer za $t = 0$ dobija se $\mathbf{g}(0) = 0$.

Ukoliko se matrica $\mathbf{E}$ iz (5.43) izabere u obliku

$$\mathbf{E} = -\mathbf{D}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}), \quad (5.44)$$

dinamika sistema u KR, koja se dobija korištenjem ekvivalentnog upravljanja, se opisuje kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{D}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D})\mathbf{d}(t). \quad (5.45)$$

U slučaju nominalnog sistema, gdje je $\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$, dinamika sistema je definisana sopstvenim vrijednostima matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. Dakle, željena nominalna dinamika sistema u KR se može podešavati matricom $\mathbf{K}$ standardnim metodama projektovanja. Prisustvo ekvivalentnog poremećaja $\mathbf{d}_{eq}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{D}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D})\mathbf{d}(t)$ u (5.45) pokazuje osjetljivost dinamike u KR na poremećaje koji djeluju van kanala upravljanja.

U slučaju konstantnog poremećaja, ustaljeno stanje van koordinatnog početka negdje na kliznoj površi se može naći iz uslova $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$, što na osnovu (5.45) daje

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{DB})^{-1}\mathbf{D})\mathbf{d}(\infty). \quad (5.46)$$

Iz (5.46) se može naći ustaljeno stanje na način

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{DB})^{-1}\mathbf{D})\mathbf{d}(\infty), \quad (5.47)$$

U literaturi se mogu sresti nekoliko preporuka za izbora matrice $\mathbf{D}$. U [56] je predložen veoma pogodan izbor ove matrice, iskazan uslovom $\mathbf{DB} = \mathbf{I}_m$, kojim se obezbjeđuje decentralizovano upravljanje u sistemu s više ulaza. Tada svaka klizna promjenljiva (element) vektora $\mathbf{g}$ se kontroliše isključivo sopstvenim upravljanjem.

Još jedan koristan izbor je da $\mathbf{D}$ bude jednak lijevoj pseudoinverziji matrice $\mathbf{B}$, tj. $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\dagger$ (ili $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\top$). Ova preporuka iz [93], koja je već korištena kao referentno podešenje u prethodnom naslovu za klasične KR, obezbjeđuje minimalnu normu ekvivalentnog poremećaja, odnosno da nema pojačavanja poremećaja koji djeluje van kanala upravljanja.

Ovdje, zadatak matrice $\mathbf{D}$ je da obezbijedi minimizaciju kriterijalne funkcije (5.22) uz ograničenja (5.39). Vidi se iz (5.47) da $\mathbf{D}$ ima uticaj na formiranje ustaljenog stanja. Zato matricu $\mathbf{D}$ treba odrediti tako da dovede stanje sistema u optimalno stacionarno stanje (5.42) za bilo koji konstantni poremećaj van kanala upravljanja. Na taj način će integralna klizna površ obezbijediti minimalnu grešku u ustaljenom stanju. Teško je odrediti matricu $\mathbf{D}$ koja obezbjeđuje (5.42) direktno iz (5.47). Efikasan način rješavanja tog problema je dat u [76], koji će ovdje biti objašnjen.

Optimalna integralna klizna površ (5.43) sistema (5.35) koja obezbjeđuje minimizaciju kriterijalne funkcije u smislu i pod uslovima (5.41) i (5.42), kao i decentralizovano upravljanje u sistemu, se postiže izborom matrice $\mathbf{D}$ u obliku

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0}_{m \times n} \quad \mathbf{I}_m] \cdot [(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{P}_x \quad \mathbf{B}]^\dagger, \quad (5.48)$$

gdje $\dagger$ označava matričnu pseudoinverziju.

5.2.4. Primjenjivost za vremenski promjenljive poremećaje

Kao što je pokazano u slučaju klasičnog KR, i ovdje treba očekivati da će projektovana integralna klizna površ obezbijediti zadovoljavajuće performanse i u slučaju sporopromjenljivih poremećaja, sve do granične frekvencije ω_b . Referentno podešenje će i ovdje biti $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\dagger$ [93]. Analiza u frekvencijskom domenu se sprovodi pod pretpostavkom da je poremećaj u (5.45) sinusoidalan. Neka je, bez gubitka opštosti, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d} \sin \omega t$, gdje je $\mathbf{d}$ vektor amplitude. Odziv sistema (5.45) će, nakon prelaznog režima, takođe biti sinusoidalan, iste frekvencije, ali može doći do promjene amplitude i faze. Dakle, i -ta komponenta vektora stanja $\mathbf{x}(t)$ se može predvidjeti kao $x_i(t) = A_i(\omega) \sin(\omega t + \varphi_i(\omega))$. U fazorskoj notaciji vektori poremećaja i stanja se mogu predstaviti kao

$$\mathbf{d}(\omega) = \mathbf{d}, \quad \mathbf{x}(\omega) = [x_1(\omega) \cdots x_n(\omega)]^\top, \quad x_i(\omega) = A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}. \quad (5.49)$$

Frekvencijski odziv sistema (5.45) se tada može iskazati kao

$$\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{W}(j\omega)\mathbf{d}(\omega), \quad \mathbf{W}(j\omega) = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{DB})^{-1}\mathbf{D}). \quad (5.50)$$

Neka je bez gubitka opštosti $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ u relaciji (5.22). Tada kriterijalna funkcija postaje vektorska norma ustaljenog stanja, koja za sinusoidalni poremećaj postaje

$$\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{x}(t) = \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i^2(\omega) (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i(\omega))). \quad (5.51)$$

Kako je $\|\mathbf{x}(\omega)\|^2 = \mathbf{x}^H(\omega)\mathbf{x}(\omega) = \sum_{i=1}^n A_i^2(\omega)$, gdje oznaka H u eksponentu označava konjugovano transponovanje, (5.51) se može izraziti u obliku

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\omega)\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i^2(\omega) \cos(2\omega t + 2\varphi_i(\omega)). \quad (5.52)$$

Ova relacija otkriva vezu između vektorske norme stanja sistema u vremenskom domenu i njenih predstavnika u frekvencijskom domenu. Sada, granična frekvencije definiše frekvencijski opseg u kome vrh norme $\|\mathbf{x}(t)\|_{\max}^2$ za $\mathbf{D}$ podešeno po (5.48) ostaje ispod referentne vrijednosti $\|\mathbf{x}_r(t)\|_{\max}^2$ za $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\dagger$, tj.

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\max}^2 \leq \|\mathbf{x}_r(t)\|_{\max}^2, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_b. \quad (5.53)$$

Da bi se osiguralo važenje uslova (5.53) dovoljna je negativna semi-definitnost sljedeće matrice

$$2 \mathbf{W}^H(j\omega) \mathbf{W}(j\omega) - \mathbf{W}_r^H(j\omega) \mathbf{W}_r(j\omega) \leq \mathbf{0}, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_b, \quad (5.54)$$

gdje su $\mathbf{W}(j\omega)$ i $\mathbf{W}_r(j\omega)$ frekvencijski odzivi matrice funkcije prijenosa (5.50) za $\mathbf{D}$ podešeno po (5.48) i $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\dagger$, redom.

Dakle, sada se ω_b može naći kao granična frekvencija za koju su sve nenulte sopstvene vrijednosti matrice (5.54) negativne. Ovaj problem se ne može u opštem slučaju riješiti analitički, već se može naći rješenje numerički. Međutim, dovoljni uslov (5.54) i njegova ekvivalencija u vremenskom domenu (5.53) su veoma konzervativni i u nekim sistemima se ne mogu ispuniti za realno ω .

Korisniji uslov se može dobiti relaksacijom gornjih zahtjeva, u kojem da bi se osiguralo važenje uslova (5.53) potrebno je da najveće singularne vrijednosti matrica funkcija prijenosa zadovolje sljedeću nejednačinu

$$\sqrt{2} \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{W}(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{W}_r(j\omega)), \quad 0 \leq \omega \leq \omega_b. \quad (5.55)$$

Ovaj uslov je manje rigorozan ali praktičniji, zato što je nalaženje singularne vrijednosti frekvencijskog odziva sistema dobro podržano u MATLAB okruženju. Najveća singularna vrijednost matrice funkcije prijenosa predstavlja najveće pojačanje sistema u svim mogućim pravcima ulaznog vektora na datoj frekvenciji.

Dakle, uslov (5.55) ima jasno fizičko značenje i može se primijeniti samo na procjenu granične frekvenciji, jer stvarna granična frekvencija može biti viša u zavisnosti od konkretnog pravca vektora poremećaja. Za poznat pravac vektora poremećaja $\mathbf{d}$, tačna granična frekvencija se direktno može odrediti korištenjem (5.52) i (5.53).

Treba napomenuti da dinamika sistema u KR, koja se podešava matricom $\mathbf{K}$, takođe utiče na graničnu frekvenciju kroz $\mathbf{W}(j\omega)$, pored projektovane klizne površi. To znači da se može podesiti ω_b , da pokrije frekvencijski spektar sporopromjenljivog poremećaja koji djeluje na sistem, podešavanjem dinamike sistema u KR.

U nastavku je dat primjer koji demonstrira projektovanje optimalne integralne klizne površi za regulacioni sistem, pri čemu se njen kvalitet procjenjuje na osnovu frekvencijskog odziva i minimalne norme vektora greške u poređenju s referentnom kliznom površi. Rezultati simulacije i poređenja s PI regulatorom pokazuju da predložena površ daje bolju kompenzaciju poremećaja.

Primjer 5.5

U cilju demonstracije prikazane metode projektovanja optimalne integralne klizne površi, razmatraće se sljedeći regulacioni problem. Neka je objekat upravljanja s jednim ulazom i izlazom dat u kontrolabilnoj kanonskoj formi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u(t) + f(t)) + \mathbf{d}(t), \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak upravljanja je regulisati izlaz sistema da dosegne referentnu vrijednost $y_r = 1$. Pošto je $y = x_1$, vektor greške $\mathbf{e}(t) = [x_1(t) - y_r \ x_2(t) \ x_3(t)]$ je ulaz u regulator promjenljive strukture

$$u = -(\mathbf{DB})^{-1}[(\mathbf{DA} + \mathbf{E})\mathbf{e} + \mathbf{H} \operatorname{sign}(g)], \quad \mathbf{H} = (d_m \|\mathbf{D}\| + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Primjena prekidačke komponente u upravljanju, koja u realnom sistemu indukuje treperenje, ima za cilj da ostvareni integralni KR što je moguće više nalikuje idealnom KR, koji je pretpostavka sprovedene analize.

Neka je u optimizacionom kriterijumu (5.22) $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ i željena dinamika u KR je zadata sopstvenim vrijednostima $\lambda \in \{-2, -2.5, -3\}$. Optimalna klizna površ je na osnovu (5.44) i (5.48) definisana kao

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 18.5 & 7.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\star)$$

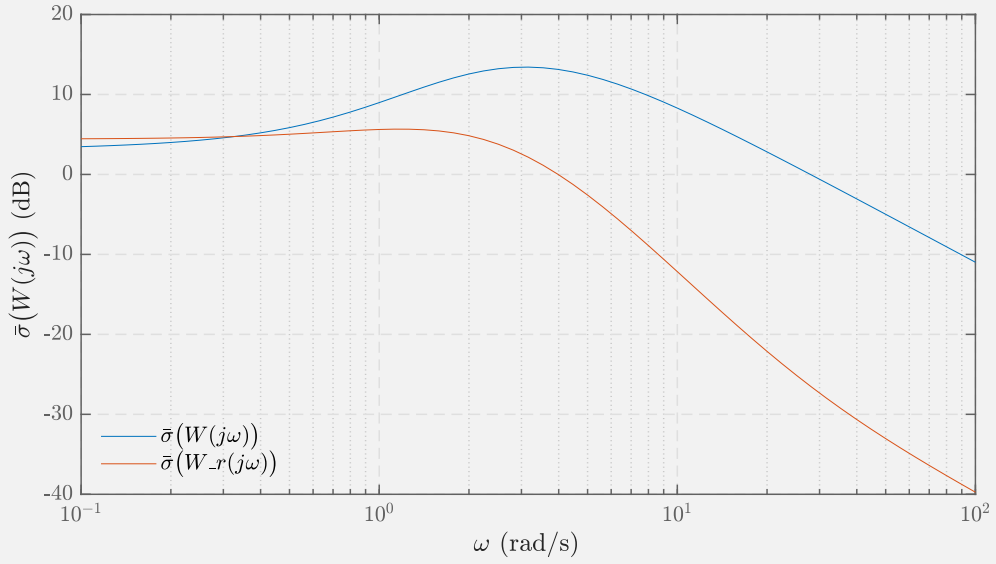
Komparacije radi, jedna klizna površ je konstruisana na osnovu [93] kao

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 15 & 18.5 & 7.5 \end{bmatrix}. \quad (\star\star)$$

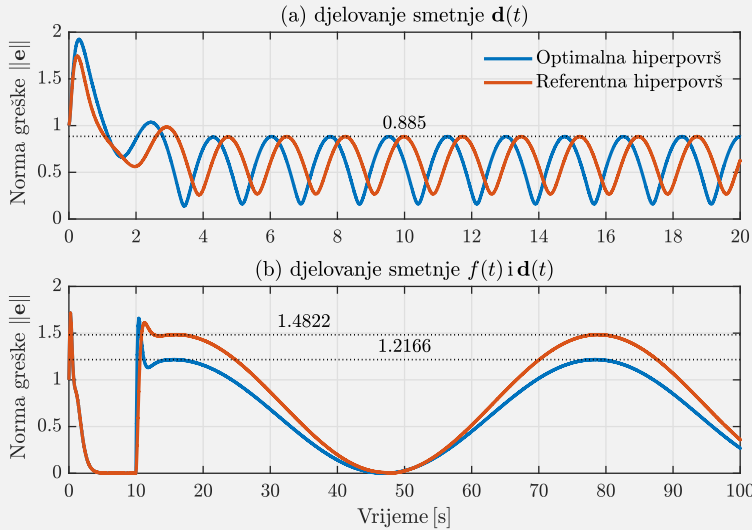
Najprije treba naći frekvencijski opseg u kome klizna površ $(\star)$ obezbjeđuje bolji odziv od referentne površi $(\star\star)$ u slučaju poremećaja $\mathbf{d}(t) = \mathbf{\Delta} \sin \omega t$.

Rigorozni uslov (5.54) se ne može zadovoljiti za bilo koju realnu frekvenciju. Međutim, uslov (5.55) daje $\omega_b = 0.32593 \text{ rad/s}$, na kojoj frekvencijski odziv najveće singularne vrijednosti sistema s optimalnom kliznom površi (slika 5.5 -

plava linija) siječe s donje strane odziv sistema s referentnom površi (slika 5.5 - crvena linija). Za dati pravac sinusoidalnog poremećaja, na primjer za $\Delta = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$, može se izračunati egzaktna vrijednost $\omega_{be} = 1.7987$ na osnovu (5.52) i (5.53).



Slika 5.5. Frekvencijski odziv najvećih singularnih vrijednosti



Slika 5.6. Norme vektora greške za različito definisane površi i različite tipove poremećaja

Na ovoj frekvenciji obje norme vektora greške trebaju imati isti maksimum, što je potvrđeno simulacijom na slici 5.6(a). Treba primijetiti da je ω_{be} dosta više od ω_b , koja je procijenjena za bilo koji pravac poremećaja. To znači da uslov (5.55) daje dovoljnu frekvencijsku rezervu. Za poremećaje s frekvencijom većom od ω_b , prikazani metod je manje pogodan, jer za neke pravce poremećaja površ (★★) može postići manje pikove norme.

Neka sada na sistem djeluje poremećaj van kanala upravljanja $\mathbf{d}(t) = \mathbf{\Delta}(1 + \sin(0.1t))h(t - 10)$, $\mathbf{\Delta} = [-0.1 \quad -0.6 \quad 0.2]$ i poremećaja koji djeluje u kanalu upravljanja $f(t) = 2 \sin(\pi t)$. Poremećaj van kanala se sastoji od konstantnog i sinusoidalnog dijela, čija se frekvencija nalazi ispod ω_b . Da bi se izračunala minimalna norma ustaljenog stanja za optimalnu kliznu površ (★), poremećaj treba smatrati konstantnim.

Zato je u kalkulaciji (5.42) uzeta njegova maksimalna vrijednost $\mathbf{d}(t) = 2\mathbf{\Delta}h(t - 10)$, te je dobijeno ustaljeno stanje $\mathbf{e}_{\min}(\infty) = [0 \quad 0.2 \quad 1.2]$, odnosno $\mathbf{x}_{\min}(\infty) = [1 \quad 0.2 \quad 1.2]$ i njegova norma $\|\mathbf{e}_{\min}(\infty)\| = 1.2166$.

Kao što se moglo očekivati, za referentnu površ (★★) je ostvarena veća norma $\|\mathbf{e}(\infty)\| = 1.4822$. Simulacioni rezultati za ovaj slučaj su prikazani na slici 5.6(b), na osnovu kojih se može vidjeti da su norme invarijantne na poremećaj u kanalu upravljanja ali su osjetljive na poremećaje van opsega matrice $\mathbf{B}$. Može se vidjeti da nakon završetka prelaznog procesa, norme ostaju tačno ispod analitički predviđenih vrijednosti za konstantan poremećaj.

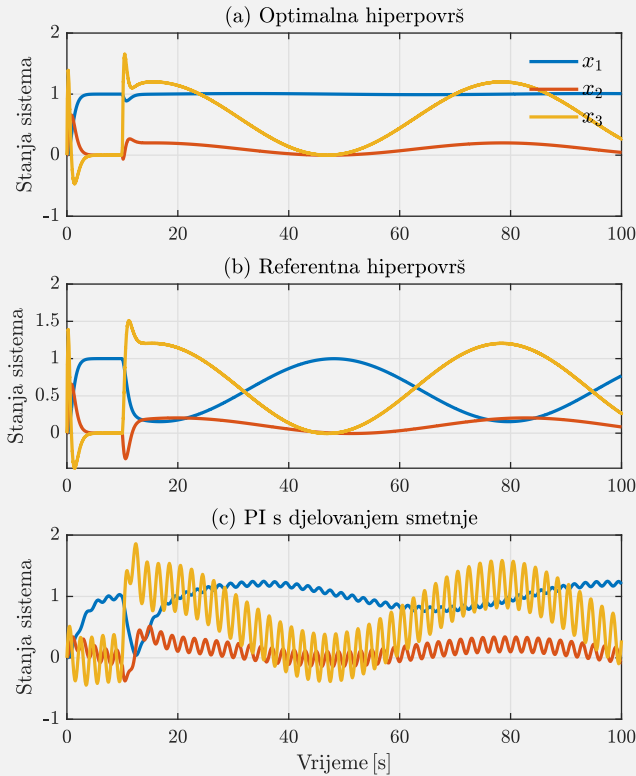
Ovo potvrđuje primjenljivost prezentirane metode za sporopromjenljive poremećaje ispod granične učestanosti. Važno je uočiti iz izračunatog vektora $\mathbf{e}_{\min}(\infty)$ da je ostvareno nulto ustaljeno stanje za prvu koordinatu, što se može pokazati da je uvijek slučaj kada se primijeni prezentirana optimizaciona metoda na sistem u kanonskoj kontrolabilnoj formi. To znači da prva koordinata stanja, što je po pravilu izlaz sistema, dostiže referentnu vrijednost.

Dakle, javlja se invarijantnost izlaza sistema na konstantne poremećaje i van kanala upravljanja. U ovom primjeru treba očekivati veoma malu osjetljivost izlaza na spori sinusoidalni poremećaj, što je potvrđeno simulacijama na slici 5.7(a). Ova osobina ne postoji za referentno podešenje površi (★★), te značajnija greška nastaje usljed djelovanja poremećaja (slika 5.7(b)).

U cilju komparacije primijenjen je i konvencionalni PI regulator s prenosnom funkcijom $G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$. Da bi ovaj regulator uopšte mogao biti uporediv s projektovanim regulatorima promjenljive strukture, potrebno je podesiti regulator tako da se postigne što je moguće brži odziv. Prenosna funkcija objekta upravljanja se može naći na osnovu parametara polaznog sistema kao

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Projektni zahtjev se može ispuniti skraćivanjem najsporijeg pola $s = -1$, pa se na osnovu geometrijskog mjesta korijena mogu odrediti parametri PI regulatora kao $k_p = 2.1126$ i $T_i = 1$ s. Rezultujuća dinamika spregnutog sistema je okarakterisana spektrom polova $\lambda \in \{-0.785, -0.785, -3.43\}$, što ukazuje da PI regulator ne može biti brz kao regulator promjenljive strukture. Izlaz sistema je znatno sporiji u slučaju PI regulacije i ima slabije performanse u kompenzaciji oba sinusoidalna poremećaja, što se može vidjeti na 5.7(c).



Slika 5.7. Poređenje odziva sistema za različite strukture regulatora

Dakle, regulator promjenljive strukture s optimalnom integralnom kliznom površi predstavlja superioran izbor u ovom slučaju, jer daje brzu dinamiku, invarijantnost na poremećaje u kanalu upravljanja, kao i zanemarljivu grešku u izlazu za vrijeme ustaljenog stanja.

★ ★ ★ ★ ★

6. Klizni režimi višeg reda

KRVR predstavljaju prirodno proširenje konvencionalnog KR prvog reda sa ciljem postizanja veće robusnosti, te ublažavanja treperenja u upravljačkom signalu. Za razliku od klasičnog pristupa, gdje se zahtijeva ostvarenje klizanja nad samom kliznom promjenljivom, kod KRVR nameće se klizanje i nad izvodima klizne promjenljive, čime se otvara prostor za finije oblikovanje dinamike sistema. Posebno značajno mjesto u ovoj oblasti imaju KR drugog reda, među kojima se izdvajaju *twisting* i *super-twisting* algoritmi kao najpoznatiji i najčešće korišteni postupci. Njihova važnost ogleda se u tome što omogućavaju očuvanje robusnih osobina upravljanja u kliznom režimu uz povoljnije dinamičke karakteristike i praktično prihvatljivije ponašanje upravljačkog signala. Pored ovih metoda, u okviru ovog poglavlja biće razmotren i opštiji koncept KR proizvoljnog višeg reda, kojim se uspostavlja jedinstven teorijski okvir za sintezu složenijih zakona upravljanja. Na taj način poglavlje daje pregled i osnovnih ideja i reprezentativnih algoritama koji čine teoriju KRVR.

6.1. KR drugog reda

Za sistem opisan jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) u(t), \quad (6.1)$$

neka je uvedena skalarna klizna promjenljiva

$$g = g(\mathbf{x}). \quad (6.2)$$

U analizi KR drugog i višeg reda od posebnog je značaja relativni red klizne promjenljive $g(\mathbf{x})$ u odnosu na upravljački signal $u(t)$. On određuje u kojem se izvodu promjenljive $g(\mathbf{x})$ upravljanje pojavljuje eksplicitno, te time neposredno usmjerava izbor odgovarajućeg zakona upravljanja u KR.

Prvi totalni izvod klizne promjenljive po vremenu dat je izrazom

$$\dot{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) u(t)). \quad (6.3)$$

Daljim diferenciranjem dobija se

$$\ddot{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \dot{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) u(t)) + \frac{\partial \dot{g}(\mathbf{x})}{\partial u} \dot{u}(t). \quad (6.4)$$

Na osnovu prethodnih relacija relativni red r klizne promjenljive može se definisati preko izvoda u kojem se upravljanje pojavljuje eksplicitno. U tom smislu razlikuju se sljedeći slučajevi:

(a) **Relativni red $r = 1$:**

$$\frac{\partial \dot{g}(\mathbf{x})}{\partial u} \neq 0. \quad (6.5)$$

U ovom slučaju upravljanje se pojavljuje već u prvom izvodu klizne promjenljive, pa se problem održavanja uslova $g(\mathbf{x}) = 0$ može rješavati metodama konvencionalnog KR.

(b) **Relativni red $r \geq 2$:**

$$\frac{\partial g^{(i)}(\mathbf{x})}{\partial u} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1), \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial g^{(r)}(\mathbf{x})}{\partial u} \neq 0. \quad (6.7)$$

Pri ovim uslovima upravljanje se ne pojavljuje eksplicitno u prвих $r-1$ izvoda klizne promjenljive, nego tek u izvodu reda r .

U slučaju relativnog reda $r = 1$ konvencionalni KR predstavlja prirodan i neposredno primjenjiv izbor. Međutim, njegova osnovna slabost ogleda se u prekidnoj prirodi upravljačkog signala, koja u realnim uslovima dovodi do pojave treperenja. Naime, zbog konačne frekvencije preklapanja, kašnjenja, nemodeliranih dinamika, ograničenja aktuatora i šuma mjerenja, idealni KR po kliznoj površi ne može se ostvariti, pa se trajektorije sistema zadržavaju u njenoj uskoj okolini. Posljedica toga su visokofrekventne oscilacije upravljačkog signala i promjenljivih stanja, što može izazvati dodatne energetske gubitke, zagrijavanje i habanje aktuatora, kao i pobudu nepoželjnih brzih dinamika sistema.

Upravo zbog toga i u slučaju $r = 1$ KR drugog reda može biti od posebnog interesa. Osnovna ideja tada je da se izvod upravljačkog signala $\dot{u}(t)$ posmatra kao nova, virtualna upravljačka veličina. Na taj način stvarni upravljački signal $u(t)$ postaje kontinualan, dok se diskontinuitet pomjera na viši diferencijalni nivo upravljačkog signala. Time se zadržavaju robusna svojstva upravljanja u KR, ali se efekat treperenja značajno ublažava.

U slučaju relativnog reda $r \geq 2$, konvencionalni KR više nije neposredno primjenjiv, jer se upravljanje ne pojavljuje u prvom izvodu klizne promjenljive. Tada se prirodno uvodi koncept KRVR, pri čemu se kretanje u KR nameće ne samo nad samom kliznom promjenljivom $g(\mathbf{x})$, nego i nad njenim sukcesivnim izvodima. Posebno je važan slučaj $r = 2$, jer upravo tada upravljanje ulazi u drugi izvod klizne promjenljive, pa se dinamika (6.4) može zapisati u obliku

$$\ddot{g}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) u(t). \quad (6.8)$$

gdje su $\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \dot{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $h(\mathbf{x}) = \frac{\partial \dot{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x})$.

Ako se pretpostavi da su funkcije $\phi(\mathbf{x})$ i $h(\mathbf{x})$ ograničene tako da važi

$$|\phi(\mathbf{x})| \leq C, \quad K_m \leq h(\mathbf{x}) \leq K_M, \quad (6.9)$$

gdje su $C > 0$ i $0 < K_m \leq K_M$, tada se dobija procjena

$$-C + K_m u(t) \leq \ddot{g}(\mathbf{x}) \leq C + K_M u(t), \quad (6.10)$$

koja jasno razdvaja ograničeni neizvjesni dio dinamike od dijela koji se može oblikovati upravljanjem.

Iz prethodnog se vidi da KR drugog reda ima dvostruku ulogu. S jedne strane, on predstavlja prirodno rješenje za sisteme relativnog reda dva, kod kojih se upravljanje pojavljuje tek u izrazu za $\ddot{g}(\mathbf{x})$. S druge strane, on se može uspješno primijeniti i kod sistema relativnog reda jedan, kada se želi smanjiti treperenje i ostvariti glatkiji upravljački signal. Zbog toga KR drugog reda predstavlja najvažniji prelaz između konvencionalnog KR i opšte teorije KR proizvoljnog višeg reda, te ujedno prirodnu osnovu za dalje razmatranje *twisting* i *super-twisting* algoritama.

6.1.1. *Twisting* regulator

Twisting regulator opisan u ovom odjeljku je prvi predloženi regulator za KR drugog reda. Definisan je relacijom

$$u = -k_1 \mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) - k_2 \mathbf{sign}(\dot{g}(\mathbf{x})), \quad (6.11)$$

gdje su k_1 i k_2 odgovarajuće konstante za koje treba da vrijedi $k_1 > k_2 > 0$ [13].

Sada se postavlja pitanje da li regulator definisan sa (6.11) garantuje pojavu KR drugog reda $g(\mathbf{x}) = \dot{g}(\mathbf{x}) = 0$ u konačnom vremenu i za koje vrijednosti koeficijenata k_1 i k_2 .

Uvrštavanjem (6.11) u relaciju (6.8) dobija se dinamička jendačina

$$\ddot{g}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}) \left(k_1 \mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) + k_2 \mathbf{sign}(\dot{g}(\mathbf{x})) \right) \quad (6.12)$$

čije kretanje će biti analizirano u nastavku primjenom teorije Ljapunova.

Posmatrajmo pozitivno definitnu funkciju Ljapunova

$$V(g(\mathbf{x}), \dot{g}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \dot{g}^2(\mathbf{x}) + \alpha |g(\mathbf{x})|. \quad (6.13)$$

čiji izvod po vremenu je

$$\dot{V} = \dot{g}(\mathbf{x}) \ddot{g}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) \dot{g}(\mathbf{x}). \quad (6.14)$$

Uvrštavanjem (6.12) u relaciju (6.14) dobija se relacija

$$\dot{V} = \dot{g}(\mathbf{x}) \left(\phi(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}) (k_1 \mathbf{sign}(g) + k_2 \mathbf{sign}(\dot{g}(\mathbf{x}))) + \alpha \mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) \right). \quad (6.15)$$

Predznak i vrijednost posljednje jednačine zavisi od predznaka umnoška $g(\mathbf{x})\dot{g}(\mathbf{x})$, tako da postoje dva slučaja koja će biti analizirana.

Za $g(\mathbf{x})\dot{g}(\mathbf{x}) > 0$ vrijedi $\mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) = \mathbf{sign}(\dot{g}(\mathbf{x}))$ tako da se jednačina (6.15) može pisati kao

$$\dot{V} = |\dot{g}(\mathbf{x})| \left(\phi(\mathbf{x}) \mathbf{sign}(g(\mathbf{x})) - h(\mathbf{x}) (k_1 + k_2) + \alpha \right). \quad (6.16)$$

što uz uslove (6.9) postaje

$$\dot{V} < - \left(K_m (k_1 + k_2) - C - \alpha \right) |\dot{g}(\mathbf{x})|. \quad (6.17)$$

Za $g(\mathbf{x})\dot{g}(\mathbf{x}) < 0$ vrijedi $\text{sign}(g(\mathbf{x})) = -\text{sign}(\dot{g}(\mathbf{x}))$ tako da se jednačina (6.15) može pisati kao

$$\dot{V} = |\dot{g}(\mathbf{x})| \left(-\phi(\mathbf{x})\text{sign}(g(\mathbf{x})) - h(\mathbf{x})(k_1 - k_2) - \alpha \right). \quad (6.18)$$

što uz uslove (6.9) postaje

$$\dot{V} < -\left(\alpha - K_M(k_1 - k_2) - C \right) |\dot{g}(\mathbf{x})|. \quad (6.19)$$

Da bi uslovi (6.17) i (6.19) bili zadovoljeni, potrebno je da vrijedi

$$K_M(k_1 - k_2) + C < \alpha < K_m(k_1 + k_2) - C, \quad (6.20)$$

odnosno

$$K_M(k_1 - k_2) + C < K_m(k_1 + k_2) - C. \quad (6.21)$$

Posljednja nejednačina predstavlja uslov za odabir konstanti k_1 i k_2 *twisting* regulatora (6.11) za sistem (6.1) i (6.2) uz uslove (6.9).

Primjer 6.1

U cilju ilustracije ovog algoritma, dat je primjer sistema drugog reda čiji je objekat upravljanja opisan sljedećim jednačinama:

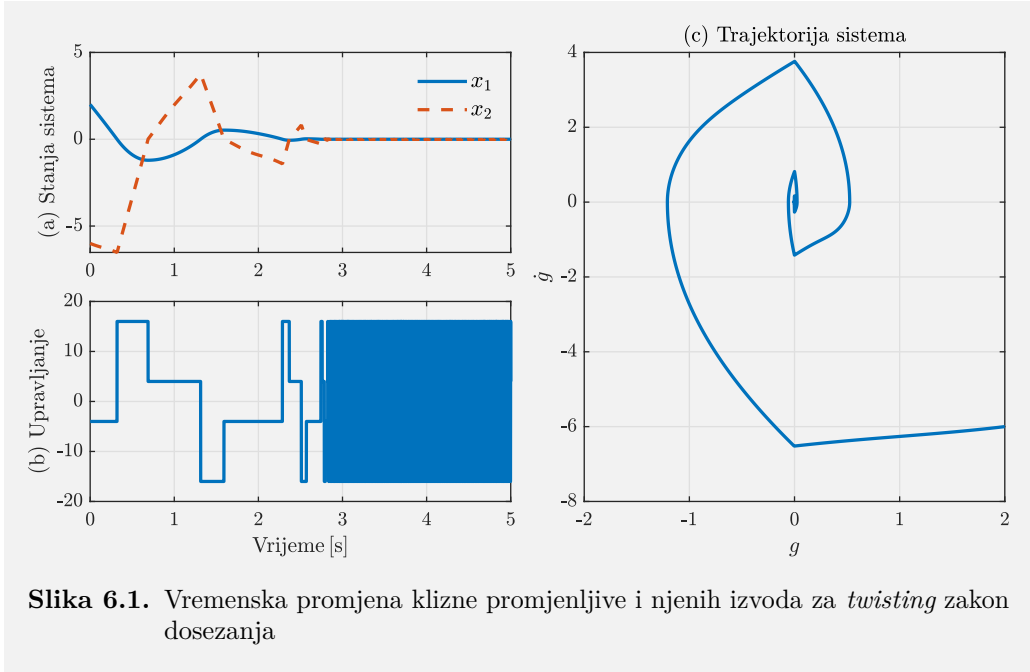
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + f(t),$$

gdje je $f(t)$ poremećaj definisana izrazom $f(t) = 2 + 0.6\sin(10t)$. Kao početno stanje pretpostavljamo $x_1(0) = 2$ i $x_2(0) = -6$.

Neka je klizna promjenljiva odabrana kao $g(\mathbf{x}) = x_1$ čiji prvi izvod je $\dot{g}(\mathbf{x}) = \dot{x}_1(t) = x_2$ dok drugi izvod je $\ddot{g}(\mathbf{x}) = \dot{x}_2(t) = u(t) + f(t)$. Primjenom *twisting* upravljanja definisanog sa (6.11), dobija se jednačina

$$\ddot{g}(\mathbf{x}) = -k_1\text{sign}(g(\mathbf{x})) - k_2\text{sign}(\dot{g}(\mathbf{x})) + f(t),$$

koja opisuje kretanje polaznog sistema u KR drugog reda. Za dati sistem vrijedi $K_m = K_M = 1$ i $C = 2.6$, pa na osnovu (6.21) se može dobiti $k_2 > 2.6$. Za konstante $k_1 = 10$ i $k_2 = 6$, odziv sistema je dat na slici 6.1.



Slika 6.1. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenih izvoda za *twisting* zakon dosezanja

6.1.2. *Super-twisting* regulator

Iako *twisting* regulator omogućava realizaciju KR drugog reda s konačnim vremenom konvergencije klizne promjenljive i njenog prvog izvoda, njegova primjena je dosta složena. Naime, za realizaciju regulatora zahtijeva se mjerenje ili estimacija izvoda klizne promjenljive što u praktičnim sistemima može dovesti do povećane osjetljivosti na šum.

Kako bi se prevazišao ovaj nedostatak, razvijen je *super-twisting* - STA regulator, koji ostvaruje KR drugog reda koristeći isključivo informaciju o kliznoj promjenljivoj. Zadržavanjem nelinearnog člana i uvođenjem dodatne integralne komponente, STA zadržava robusna svojstva i konačno vrijeme konvergencije uz značajno smanjenje neželjenih oscilacija i jednostavniju praktičnu implementaciju.

Posmatrajmo sistem definisan sa (6.1) i (6.2). Jednačina (6.3), uz pretpostavku da je $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \equiv 1$, može biti zapisana u obliku

$$\dot{g}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + u(t), \quad (6.22)$$

gdje je $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ograničena funkcija.

U [13], STA regulator je definisan izrazima

$$u(t) = -k_1 \sqrt{|g(\mathbf{x})|} \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})) + v(t), \quad (6.23)$$

$$\dot{v}(t) = -k_2 \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})). \quad (6.24)$$

Uvrštavanjem jednačine (6.23) u jednačinu (6.22) dobija se

$$\dot{g}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - k_1 \sqrt{|g(\mathbf{x})|} \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})) + v(t), \quad (6.25)$$

$$\dot{v}(t) = -k_2 \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})). \quad (6.26)$$

Ponovo, dokaz da prethodni sistem jednačina opisuje stabilno kretanja u KR drugog reda $g(\mathbf{x}) = \dot{g}(\mathbf{x}) = 0$ u konačnom vremenu provodi se primjenom teorije Ljapunova.

U naučnom radu [100] predložena je funkcija Ljapunova kojom se osigurava konvergencija svih trajektorija opisanog sistema ka nuli u konačnom vremenu, pod uslovom da je $\varphi(\mathbf{x})$ ograničeno i pojačanja k_1 i k_2 adekvatno odabrana.

Funkcija Ljapunova je oblika

$$V = \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}, \quad (6.27)$$

gdje su $\boldsymbol{\xi}^\top = \begin{bmatrix} |g(\mathbf{x})|^{1/2} \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})) & v(t) \end{bmatrix}$ i $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vremenski izvod funkcije Ljapunova se dobija u obliku

$$\dot{V} = -\frac{1}{|g(\mathbf{x})|^{1/2}} \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{|g(\mathbf{x})|^{1/2}} \mathbf{q}^\top \boldsymbol{\xi}, \quad (6.28)$$

gdje je $\mathbf{Q} = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{q}^\top = \begin{bmatrix} 2k_2 + \frac{1}{2}k_1^2 & -\frac{1}{2}k_1 \end{bmatrix}$.

Primjenom ograničenja $|\varphi(\mathbf{x})| \leq \delta |g(\mathbf{x})|^{1/2}$, gdje je δ određena pozitivna konstanta, izraz za izvod funkcije Ljapunova svodi se na

$$\dot{V} < -\frac{k_1}{2|g(\mathbf{x})|^{1/2}} \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 2k_2 + k_1^2 - (\frac{4k_2}{k_1} + k_1)\delta & -k_1 + 2\delta \\ -k_1 + 2\delta & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Iz posljednje relacije se da zaključiti da ako parametri regulatora k_1 i k_2 zadovoljavaju uslove:

$$k_1 > 2\delta, \quad k_2 > k_1 \frac{5k_1 + 4\delta}{2(k_1 - 2\delta)}\delta, \quad (6.30)$$

tada vrijedi $\mathbf{\Omega} > 0$, što implicira da je izvod funkcije Ljapunova negativan. Slijedi da kretanje sistema opisano jednačinama (6.25) i (6.26) je stabilno.

Polazeći od relacije (6.29) može se izvesti gornja granica vremena konvergencije u konačnom vremenu. Budući da je $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}^\top > 0$, vrijedi

$$\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\xi} \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\} \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2, \quad (6.31)$$

gdje $\lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\}$ predstavlja najmanju sopstvenu vrijednost matrice $\mathbf{\Omega}$ a $\|\boldsymbol{\xi}\|_2^2 = |\xi_1| + \xi_2^2$ predstavlja Euklidovu normu od vektor kolone $\boldsymbol{\xi}$.

Uvrštavanjem (6.31) u (6.29) dobija se

$$\dot{V} \leq -\frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\}}{2|g(\mathbf{x})|^{1/2}} \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2. \quad (6.32)$$

U standardnoj transformaciji STA analize uzima se

$$\boldsymbol{\xi}^\top = \begin{bmatrix} |g(\mathbf{x})|^{1/2} \text{sign}(g(\mathbf{x})) & v(t) \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

pa vrijedi $|g(\mathbf{x})|^{1/2} = |\xi_1| \leq \|\boldsymbol{\xi}\|_2$. Otuda slijedi procjena

$$\frac{1}{|g(\mathbf{x})|^{1/2}} \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2 \geq \|\boldsymbol{\xi}\|_2. \quad (6.34)$$

Kombinovanjem (6.32) i (6.34) dobija se

$$\dot{V} \leq -c_1 \|\boldsymbol{\xi}\|_2, \quad c_1 \triangleq \frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\}}{2}. \quad (6.35)$$

Dalje, kako je funkcija Ljapunova kvadratno ekvivalentna normi vektora $\boldsymbol{\xi}$, postoji sopstvena vrijednost $\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\} > 0$ takva da vrijedi $V \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{P}\} \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2$ odakle slijedi procjena

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{V}{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}}. \quad (6.36)$$

Uvrštavanjem (6.36) u (6.35) dobija se diferencijalna nejednačina

$$\dot{V} \leq -\alpha\sqrt{V}, \quad \alpha \triangleq \frac{c_1}{\sqrt{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}} = \frac{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\}}{2\sqrt{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}}, \quad (6.37)$$

koja osigurava konvergenciju u konačnom vremenu [100, 101].

Sada se uvodi transformacija $W(t) \triangleq \sqrt{V(t)}$. Za $V(t) > 0$ vrijedi

$$\dot{W} = \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} \leq -\frac{\alpha}{2}. \quad (6.38)$$

Integraljenjem nejednačine (6.38) dobija se

$$W(t) \leq W(0) - \frac{\alpha}{2} t. \quad (6.39)$$

Vrijeme T u kojem $W(T) = 0$ (tj. $V(T) = 0$) zadovoljava $0 \leq W(0) - \frac{\alpha}{2} T$ odakle slijedi gornja granica konačnog vremena konvergencije

$$T \leq \frac{2}{\alpha} W(0) = \frac{2}{\alpha} \sqrt{V(0)} = \frac{4\sqrt{\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\}}}{k_1 \lambda_{\min}\{\mathbf{\Omega}\}} \sqrt{V(0)}. \quad (6.40)$$

Prema tome, iz (6.29) slijedi da $V(t)$ dostiže nulu u konačnom vremenu T ograničenom sa (6.40), te stoga $\boldsymbol{\xi}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ u konačnom vremenu, što implicira $g(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ i $v(t) \rightarrow 0$ u konačnom vremenu.

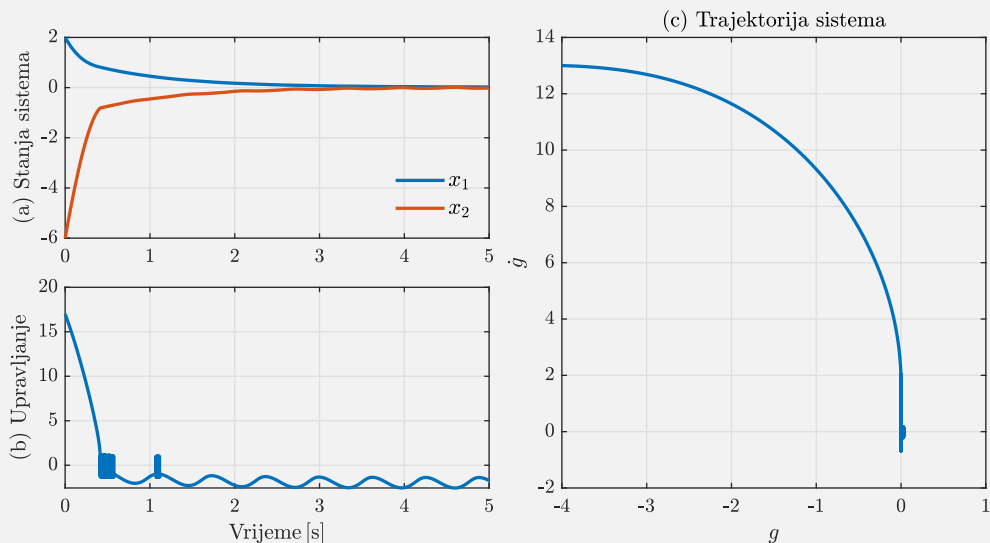
Primjer 6.2

Za ilustraciju STA koristit će se isti objekat kao u primjeru 6.1 uz isti poremećaj i početne uslove. Klizna promjenljiva se bira kao $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$, čiji prvi izvod je $\dot{g}(\mathbf{x}) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = x_2 + u(t) + f(t)$. Primjenom STA upravljanja definisanog sa (6.23) i (6.24), dobija se sistem jednačina:

$$\dot{g}(\mathbf{x}) = x_2 - k_1 \sqrt{|g(\mathbf{x})|} \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})) + v(t) + f(t), \quad \dot{v}(t) = -k_2 \operatorname{sign}(g(\mathbf{x})),$$

koji opisuje kretanje sistema u KR drugog reda. Za proizvoljno odabrane konstante $k_1 = 8$ i $k_2 = 1$, odziv sistema je dat na slici 6.2. Iz prikazanih rezultata se vidi STA obezbjeđuje glatku i monotonu konvergenciju stanja sistema ka ishodištu.

Treperenje upravljačkog signala je značajno smanjeno u poređenju s *twisting* algoritmom. Time se potvrđuje da STA predstavlja praktičnije rješenje za sisteme s ograničenjima po upravljanju i zahtjevima za smanjenim treperenjem.



Slika 6.2. Vremenska promjena klizne promjenljive i njenih izvoda za *super-twisting* zakon doseganja

6.2. KR proizvoljnog reda

Kao što se može vidjeti u prethodnom odjeljku, KR drugog reda dovode klizne promjenljive do nule u konačnom vremenu kada je relativni stepen promjenljive jednak dva, ali su u stanju riješiti isti problem pomoću kontinualnog upravljanja ako je relativni stepen jednak jedan. Na ovaj način se pomaže uklanjanju neželjenih oscilacija kod kretanja sistema u KR.

KRVR rješavaju ove probleme kod sistema proizvoljnog relativnog stepena [13, 102]. Regulatori na bazi KRVR zahtijevaju dodatne informacije, jer je u pravilu potrebno izračunati ili procijeniti više uzastopnih vremenskih izvoda kliznih promjenljivih. Ovaj zahtjev se rješava u okviru istog koncepta razvojem egzaktnih robusnih diferencijatora proizvoljnog reda. Time se omogućava rješavanje problema praćenja u konačnom vremenu i s visokom, idealnom tačnošću primjenom glatkog upravljanja, pod uslovom da je poznat izlazni relativni stepen.

6.2.1. KRVR u linearnim sistemima s jednim ulazom

Posmatrajmo kontrolabilan linearni sistem upravljanja s skalarnim upravljanjem, čiji je model u prostoru stanja dat sa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(u(t) + d(t)), \quad (6.41)$$

gdje $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je raspoloživi vektor stanja, a $u(t) \in \mathbb{R}$ je upravljanje. $d(t) \in \mathbb{R}$ je nepoznati ograničen poremećaj koji zadovoljava uslove invarijantnosti. $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b}$ su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Sve promjenljive u jednačini (6.41) su funkcije vremena, ali će u nastavku vremenski argumenti biti izostavljeni radi kraće notacije.

S obzirom na to da je pretpostavljeno da je sistem (6.41) kontrolabilan, njegova matrica kontrolabilnosti $\mathbf{C}$ data sa

$$\mathbf{C} = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (6.42)$$

ima puni rang ($\text{rang}\{\mathbf{C}\} = n$).

Zadatak upravljanja $u(t)$ je dovesti stanje sistema (6.41) iz bilo kojeg početnog stanja u koordinatni početak uprkos djelovanju poremećaja d . Tehnika KR zbog svoje robusnosti je adekvatan pristup u rješavanju ovog problema.

Neka je klizna promjenljiva $g \in \mathbb{R}$ definisan kao

$$g = \mathbf{c}\mathbf{x}, \quad (6.43)$$

gdje je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ vektor s konstantnim koeficijentima.

Klizna promjenljiva g sistema (6.41) ima relativni red r u odnosu na upravljanje ako vrijede uslovi

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^i\mathbf{b} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r-2), \quad (6.44)$$

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} \neq 0. \quad (6.45)$$

Prethodni uslovi znače da se upravljanje prvi put pojavljuje tek u r -tom izvodu klizne promjenljive g što se može zapisati jednačinom

$$g^{(r)} = \mathbf{c}\mathbf{A}^r\mathbf{x} + \mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}(u + d). \quad (6.46)$$

Kod sistema s relativnim redom $r > 1$, uslov za kretanje sistema u KR r -tog reda se definiše s

$$g = \dot{g} = \ddot{g} = \dots = g^{(r-1)} = 0 \quad (6.47)$$

U naučnom radu [103] je pokazano da upravljanje u sistemu definisanom jednačinama (6.41) i (6.43) koje obezbjeđuje da se za konačno vrijeme ostvari uslov (6.47) mora biti prekidno barem na skupu (6.47).

Štaviše, u idealnom KR je dinamika sistema redukovana na $(n - r)$ -ti red [19] što se dobija korištenjem ekvivalentnog upravljanja koje se može odrediti iz uslova $g^{(r)} = 0$ što daje

$$u_{eq} = -(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r\mathbf{x} - d. \quad (6.48)$$

Zamjenom ekvivalentnog upravljanja u jednačinu (6.41) dobija se opis sistema u KR r -tog reda

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\right)\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x}. \quad (6.49)$$

Iz dinamike sistema u idealnom KR r -tog reda opisanom (6.49) se vidi da poremećaja d nema uticaja na kretanje sistema, što znači da je sistem invarijantan na djelovanje poremećaja koji zadovoljavaju uslove invarijantnosti. Naravno, ekvivalentno upravljanje (6.48) je nemoguće fizički ostvariti, budući da zahtijeva poznavanje poremećaja.

Takođe, može se pokazati da je matrica $\mathbf{P}$ idempotentna matrica, što znači da ona predstavlja projektor matricu. Na osnovu osobina projektorskih matrica [96], nalazi se da je $\text{rang}\{\mathbf{P}\} = n - 1$. Iz ove činjenica slijedi da je $\text{rang}\{\mathbf{A}_{eq}\} = \text{rang}\{\mathbf{P}\mathbf{A}\} < n$, što znači da je $\det\{\mathbf{A}_{eq}\} = 0$ te $\mathbf{A}_{eq}$ predstavlja singularnu matricu.

Očigledno je da sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{eq}$ definišu dinamiku posmatranog sistema u KR. Ukoliko je adekvatnim izborom $\mathbf{c}$ ova dinamika stabilna, trajektorija sistema asimptotski konvergira duž (6.47) ka koordinatnom početku uprkos djelovanju poremećaja koji zadovoljavaju uslove invarijantnosti.

Ovdje je važno naglasiti da KRVr u kontinualnom vremenskom domenu mogu ostvariti stabilizaciju kretanja sistema za konačno vrijeme. Ovdje pod stabilizacijom kretanja sistema u konačnom vremenu odgovarajućim upravljanjem podrazumijeva se da vektor stanja $\mathbf{x}$ za bilo koje početno stanje $\mathbf{x}(0)$ dođe u koordinatni početak za konačno vrijeme $\mathbf{x}(t_f) = 0$ (t_f je vrijeme stabilizacije).

Projektovanje klizne površi

Kako je upravljanje (6.48) linearno, može se posmatrati kao tradicionalna povratna sprema po stanju. Naime, jednačina (6.49) koja opisuje dinamiku u KR se može zapisati kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r)\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{x}. \quad (6.50)$$

gdje je $\mathbf{k} \in R^{1 \times n}$ vektor pojačanja povratne sprege po stanju $u = -\mathbf{k}\mathbf{x}$. Kako je dinamika sistema u KR redukovanoog reda, u slučaju KR r -tog reda dinamiku odlikuje r nultih sopstvenih vrijednosti i $n - r$ sopstvenih vrijednosti različitih od nule. Nenulte sopstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$ treba izabrati da budu stabilne i da definišu željenu dinamiku sistema u KR. Ovakva dinamika se može opisati sljedećim karakterističnim polinomom

$$\phi(s) = s^r(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_{n-r}) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-r} s^r. \quad (6.51)$$

Iz teorije je poznato da se može naći jedinstveni vektor pojačanja povratne sprege $\mathbf{k}$ u kontrolabilnom sistemu (6.50) koji će obezbijediti željenu dinamiku (6.51). Jedan od načina nalaženja $\mathbf{k}$ je primjenom Akermanove formule

$$\mathbf{k} = [\mathbf{0} \ 1] \mathbf{C}^{-1} \phi(\mathbf{A}). \quad (6.52)$$

Tako određeno $\mathbf{k}$ se može iskoristiti za nalaženje nepoznatog vektora $\mathbf{c}$. Na osnovu (6.50) se može uspostaviti veza između $\mathbf{c}$ i $\mathbf{k}$ koja je data relacijom $\mathbf{k} = (\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r$, koja se može posijle sređivanja iskazati jednačinom $\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}) = \mathbf{0}$. Vektor $\mathbf{c}$ koji zadovoljava ovu jednačinu obezbijediće željenu dinamiku (6.51) sistema u KR r -tog reda. Međutim, pored ovog zahtjeva, $\mathbf{c}$ mora da obezbijedi i traženi relativni red klizne promjenljive u odnosu na upravljanje što je definisano uslovima (6.44) i (6.45). Bez umanjenja opštosti, često se uslov (6.45) bira u obliku $\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} = 1$ radi daljeg uprošćavanja.

Dakle, $\mathbf{c}$ mora da zadovolji sljedeće jednačine

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}) = \mathbf{0}, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{c}[\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{b}] = \mathbf{0}, \quad (6.54)$$

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} = 1. \quad (6.55)$$

Ako se jednačin (6.55) uvrsti u jednačinu (6.53), prethodni sistem jednačina se može zapisati kao

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^r = \mathbf{k}, \quad (6.56)$$

$$\mathbf{c}[\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{b}] = \mathbf{0}, \quad (6.57)$$

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} = 1. \quad (6.58)$$

Sistem jednačina koji se formira na osnovu (6.56)-(6.58) se sastoji od $n + r$ skalarnih jednačina sa n nepoznatih elemenata vektora $\mathbf{c}$. Ovaj sistem jednačina se može u matričnom obliku predstaviti kao

$$\mathbf{c}[\mathbf{A}^r \ \mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] = [\mathbf{k} \ \mathbf{0} \ 1]. \quad (6.59)$$

Može se pokazati da je ovaj sistem punog ranga [104], tj. da ima n linearno nezavisnih jednačina sa n nepoznatih, te da se do jedinstvenog rešenja za vektor $\mathbf{c}$ može doći korištenjem matrične jednačine

$$\mathbf{c} = [\mathbf{k} \ \mathbf{0} \ 1][\mathbf{A}^r \ \mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}]^\dagger, \quad (6.60)$$

gdje simbol † označava operaciju pseudoinverzije matrice.

Izbor algoritma upravljanja

Prethodno je naglašeno da ekvivalentno upravljanje (6.48) nije moguće fizički ostvariti, budući da zahtijeva poznavanje poremećaja. Zbog toga je u upravljanju umjesto poremećaja d potrebno dodati komponentu upravljanja koja će osigurati asimptotsku konvergenciju duž (6.47) u koordinatni početak uprkos djelovanju poremećaja.

Ako se upravljanje u sistemu (6.41) formira kao

$$u = -(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r\mathbf{x} + \gamma(g, \dot{g}, \ddot{g}, \dots g^{(r-1)}), \quad (6.61)$$

r -ti izvod po vremenu klizne promjenljive g postaje

$$g^{(r)} = -\gamma(g, \dot{g}, \ddot{g}, \dots g^{(r-1)}) + d. \quad (6.62)$$

Naime, ukoliko je relativni red klizne promjenljive g jednak dimenziji sistema $r = n$, dinamika sistema u KR višeg reda je nultog reda. To znači da KR n -tog reda, koji nastaje u konačnom vremenu, redukuje red dinamike sistema na nulu. Drugim riječima, KR n -tog reda nastaje za konačno vrijeme u koordinatnom početku.

Nekoliko istraživača je predložilo prekidne funkcije $\gamma(g, \dot{g}, \ddot{g}, \dots, g^{(r-1)})$ koje uspostavljaju KR r -tog reda na nelinearnim sistemima sa skalarnim upravljanjem.

Levant je u naučnom radu [103] predložio skup kvazi-kontinualnih funkcija definisanih kao:

$$\gamma(g) = \alpha \frac{g}{|g|}, \quad (6.63)$$

$$\gamma(g, \dot{g}) = \alpha \frac{\dot{g} + \beta_1 |g|^{1/2} \text{sign}(g)}{|\dot{g}| + \beta_1 |g|^{1/2}}, \quad (6.64)$$

$$\gamma(g, \dot{g}, \ddot{g}) = \alpha \frac{\ddot{g} + \beta_2 (|\dot{g}| + \beta_1 |g|^{1/2})^{1/2} (\dot{g} + \beta_2 |g|^{2/3} \text{sign}(g))}{|\ddot{g}| + \beta_2 (|\dot{g}| + \beta_1 |g|^{1/2})^{1/2}}, \quad (6.65)$$

gdje su parametri $\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0$ izabrani dovoljno veliki. Iz jednačina (6.63)-(6.65) se može zaključiti da kompleksnost ovih funkcija raste s porastom reda KR.

Jednostavnije prekidne funkcije uvedene su u naučnom radu [21] za čije konstruisanje nisu potrebne komplikovane rekurzivne procedure kako bi se dobile funkcije proizvoljnog reda. Dva tipa Ding-ovih prekidnih funkcija su definisane kao: relejne polinomske prekidne funkcije i kvazi-kontinualne polinomske prekidne funkcije. Relejne polinomske prekidne funkcije proizvoljnog reda r su definisane kao

$$\gamma(g, \dot{g}, \ddot{g}, \dots, g^{(r-1)}) = -\alpha \text{sign}(\lfloor g^{(r-1)} \rfloor^r + \dots + \lfloor \dot{g} \rfloor^{\frac{r}{r-1}} + \lfloor g \rfloor), \quad (6.66)$$

dok su kvazi-kontinualne polinomske prekidne funkcije proizvoljnog reda r date sa

$$\gamma(g, \dot{g}, \dots, g^{(r-1)}) = -\alpha \frac{\lfloor g^{(r-1)} \rfloor^r + \dots + \lfloor \dot{g} \rfloor^{\frac{r}{r-1}} + \lfloor g \rfloor}{|g^{(r-1)}| + \dots + |\dot{g}|^{\frac{r}{r-1}} + |g|}, \quad (6.67)$$

gdje je $\alpha > 0$ parametar konstantne vrijednosti, dok za operator $\lfloor * \rfloor$ vrijedi $\lfloor * \rfloor^\nu = |*|^\nu \text{sign}(*)$ za svako $\nu > 0$.

Ovdje treba istaći da je za formiranje upravljanja (6.64)-(6.67) potrebno poznavanje sukcesivnih izvoda klizne promjenljive $g^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, r - 1$. Međutim, u sistemima na koje djeluju poremećaji koji zadovoljavaju uslove invarijantnosti, ovi izvodi se na osnovu (6.44)-(6.46) mogu dobiti kao

$$g^{(i)} = \mathbf{c}\mathbf{A}^i \mathbf{x}, \quad i = 0, 1, \dots, r - 1. \quad (6.68)$$

Detaljni dokaz za prethodnu relaciju je dat u [104].

Primjer 6.3

Ispravnost predložene metode projektovanja klizne površi u slučaju KRVr je provjerena na numeričkom primjeru sistem petog reda [104], čije matrice su date kao

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.129 & -2.262 & 2.21 & 0.465 & 1.663 \\ 1.829 & -0.743 & -1.344 & -3.802 & -6.199 \\ -1.06 & 1.87 & -1.375 & -2.324 & 0.181 \\ 0.399 & 4.190 & 1.258 & -1.062 & 0.908 \\ -2.89 & 5.645 & 1.334 & 0.24 & -1.45 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.4136 \\ 0 \\ 0.144 \\ 0 \\ -0.7601 \end{bmatrix}.$$

Na sistem djeluju složeni poremećaj $d(t) = 2 \sin(4\pi t) + 2h(t - 3)$, gdje je $h(t)$ jedinična Hevisajdova odskočna funkcija.

Zadatak upravljanja je da se sistem uprkos djelovanju poremećaja dovede iz početnog stanja $\mathbf{x}(0) = [10 \quad -5 \quad 0 \quad -10 \quad 5]^\top$ u koordinatni početak organizovanjem KR drugog reda. Kako je u ovom slučaju $n = 5$ a $r = 2$, dinamika sistema u KR je $n - r = 3$ reda.

Neka je željena dinamika sistema definisana spektrom polova $p = \{0, 0, -3, -3, -3\}$. Korištenjem (6.52) za pojačanja povratne sprege $\mathbf{k}$ se dobija $\mathbf{k} = [4.2365 \quad -12.9816 \quad -3.4063 \quad -0.8998 \quad -2.6053]$.

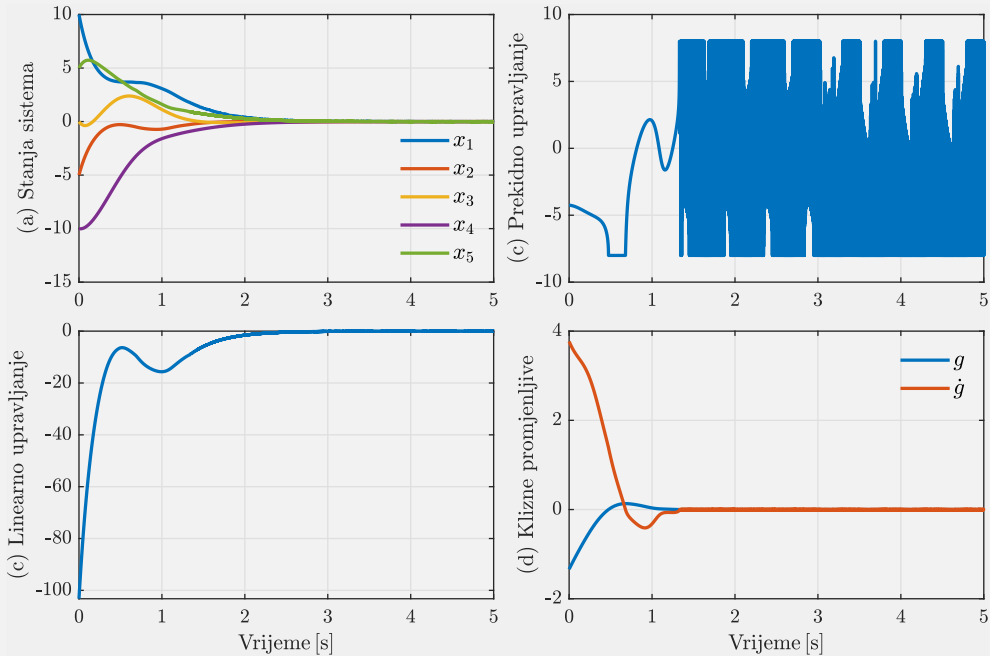
Ovdje treba uočiti da je matrica $\mathbf{A}$ punog ranga, te je matrica $\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ maksimalnog ranga $n - 1 = 4$. Primjenom relacije (6.60) dolazi se do tražene vrijednosti vektora $\mathbf{c} = [0.052 \quad 0.2238 \quad 0.101 \quad 0.0976 \quad 0.0474]$.

Provjerom je potvrđeno da dobijeno $\mathbf{c}$ zadovoljava (6.56)-(6.58) i da matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r)$ iz (6.50) ima spektar sopstvenih vrijednosti p .

Navedena izračunavanja se lahko mogu sprovesti u okviru MATLAB okruženja izvršavanjem sljedećeg seta naredbi:

```
p=[0 0 -3 -3 -3]
k=acker(A,B,p)
c=[k 0 1]*pinv([A^2 B A*B])
```

Upravljanje koje u posmatranom sistemu obezbjeđuje nastanak KR drugog reda je dato s relacijom (6.61) i (6.64), pri čemu se izvod klizne promjenljive $\dot{g}$ dobija korištenjem (6.68). Za parametre regulatora izabrano je $\alpha = 8.1$ i $\beta_1 = 1$.



Slika 6.3. Signali stanja sistema, kliznih promjenljivih, linearnog i prekidnog dijela upravljanja

Na slici 6.3 su prikazani signali stanja sistema $\mathbf{x}(t)$, upravljački signal $u(t)$, klizna promjenljiva $g(t)$ i njen izvod $\dot{g}(t)$. Vidi se da upravljanje obezbjeđuje $\dot{g} = g = 0$, odnosno nastanak KR drugog reda za konačno vrijeme uprkos djelovanju vanjskog poremećaja. Slika 6.3 pokazuje da promjenljive stanja asimptotski konvergiraju ka koordinatnom početku nakon nastanka KR s dinamikom definisanom spektrom polova p .

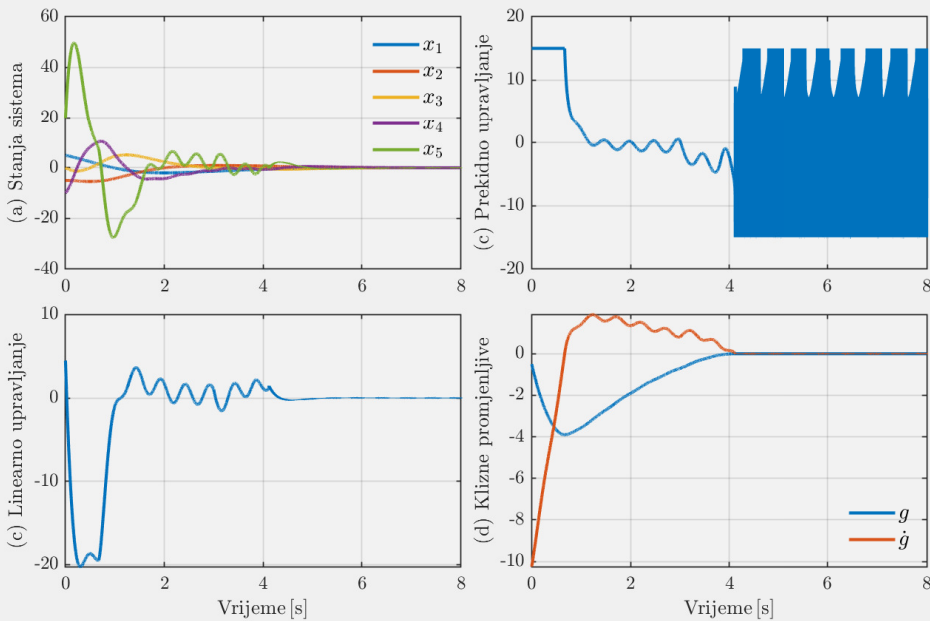
Primjer 6.4

Na sljedećem primjeru se testira slučaj kada je matrica $\mathbf{A}$ singularna. Kao objekt upravljanja se posmatra serijska veza pet integratora, čiji model karakterišu matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Model je u kontrolabilnoj kanonskoj formi, pri čemu su koeficijenti polinoma $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ dati s $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. U slučaju KR drugog reda, rang matrice $\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ je tada minimalan $n - r = 3$.

Neka kao u prethodnom primjeru, na sistem djeluje isti vanjski poremećaj i ima istu željenu dinamiku u KR. Za pojačanje povratne sprege se na osnovu (6.52) dobija $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1.35 \ 1.35 \ 0.45]$.



Slika 6.4. Signali stanja sistema, kliznih promjenljivih, linearnog i prekidnog upravljanja

Korištenjem (6.60) za $\mathbf{c}$ se dobija $\mathbf{c} = [1.35 \quad 1.35 \quad 0.45 \quad 0.05 \quad 0]$.

Provjerom jednačina (6.56)-(6.58) obezbjeđuje se da matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{c}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^r)$ ima spektar sopstvenih vrijednosti p . Ovo pokazuje da i kada matrica $\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ ima najveći mogući deficit ranga, te formula (6.60) daje ispravno rješenje.

I ovdje je primijenjen isti algoritam upravljanja (6.61), (6.64) i (6.68) gdje je $\alpha = 15$ i $\beta_1 = 1$. Simulacioni rezultati prikazani na slici 6.4 potvrđuju da i u ovom slučaju dobijeni signal klizne promjenljive g i odgovarajući upravljački signal u obezbjeđuju nastanak KR drugog reda s željenom dinamikom.

6.2.2. KRVR u linearnim sistemima s više ulaza

U sistemima s više ulaza, gdje veći broj upravljačkih signala povećava upravljačke mogućnosti sistema, ideja anuliranja reda sistema je lakše primjenjiva. Međutim, organizacija KR u dinamičkim sistemima upravljanja s više ulaza je znatno složenija nego u slučaju sistema s jednim ulazom. Postoje nekoliko faktora koji otežavaju projektovanje i implementaciju ove upravljačke metodologije na takve sisteme. Najprije, kod sistema s više ulaza klizna promjenljiva nije skalarna već vektorska veličina čiji je broj komponentata jednak broju ulaza. Svaka komponenta vektora klizne promjenljive definiše svoju kliznu površ u prostoru stanja sistema.

Dakle, da bi nastao KR u viševarijabilnom sistemu potrebno je organizovati klizanje duž presjeka svih individualnih kliznih površi, što je komplikovaniji zadatak. Tada je dinamika sistema u KR redukovana za broj ulaza sistema. Takođe, definisanje kliznih površi koje će obezbijediti željenu redukovanu dinamiku u KR je kompleksnije. Neadekvatan izbor kliznih površi može rezultovati sporom konvergencijom sistema ili čak njegovom nestabilnošću.

Možda značajnija otežavajuća okolnost prilikom projektovanja KR je činjenica da upravljačke komponente mogu istovremeno uticati na više koordinata stanja a samim tim i na više komponenti kliznih promjenljivih. Posljedica toga je spregnutost kliznih promjenljivih, te na primjer jedna upravljačka komponenta koja anulira jednu kliznu promjenljivu može destabilišuće djelovati na neku drugu kliznu promjenljivu. Rješenje ovog problema bi bilo uspostaviti koordinisano upravljanje, što uopšte ne predstavlja lagan zadatak. Drugi način je ostvariti raspredanje upravljačkih komponenti odgovarajućim transformacionim tehnikama.

Treperenje, kao neželjene oscilacije koje su posljedica uvođenja KR, je takođe izraženiji kod sistema s više ulaza. Postojanje više upravljačkih komponenti, koje uglavnom sadrže prekidačke elemente, u većoj mjeri pobuđuju nemodeliranu dinamiku što rezultuje značajnijim treperenjem. Iz tih razloga, prilikom upravljanja u KR sistema s više ulaza, po pravilu se primjenjuju upravljački algoritmi koji u sebi imaju mehanizme za ublažavanje treperenja.

Primjenom KRVR u sistemima s više ulaza se može postići da se red dinamike sistema redukuje za broj koji je veći od broja ulaza [103]. Ova činjenica je iskorištena u naučnom radu [105], gdje je u vremenski kontinualnom sistemu upravljanja s više ulaza ostvaren nulti red dinamike sistema u KR pogodnim izborom vektora upravljanja i odgovarajućeg reda KR višeg reda. Na taj način je obezbjeđeno konačno vrijeme dolaska sistema u ravnotežno stanje (koordinatni početak) za tradicionalne linearne klizne površi, što nije moguće postići konvencionalnim KR.

Dakle, na osnovu prethodnog se može zaključiti da bi u zadacima upravljanja viševarijabilnih sistema primjenom KR veoma značajno bilo ostvariti raspredanje upravljačkih komponenti i mogućnost proizvoljnog izbora reda dinamike sistema u KR. Zato će upravo rješavanje ovih zahtjeva biti predstavljeno u daljem tekstu.

U ovom dijelu će biti pokazano na koji način se projektuje vektor upravljanja primjenom tehnike KR višeg reda koji za konačno vrijeme anulira red sistema i na taj način obezbjeđuje stabilizaciju sistema u konačnom vremenu.

Posmatra se LTI sistem upravljanja opisan u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{d}(t), \quad (6.69)$$

gdje je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja, a $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^l$ je vektor nepoznatog ograničenog poremećaja ($|d_i| < \Delta_i \in \mathbb{R} \ i = 1, \dots, l$). Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$ su konstantne i imaju odgovarajuće dimenzije. Matrica $\mathbf{B}$ treba biti punog ranga ($\text{rang}\{\mathbf{B}\} = m$). Takođe, treba pretpostaviti da su zadovoljeni uslovi invarijantnosti ($\text{rang}\{[\mathbf{B} \ \mathbf{D}]\} = \text{rang}\{\mathbf{B}\}$), tako da je sistem u idealnom KR invarijantan na poremećaj $\mathbf{d}$ što se može zapisati kao $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{D}_o$.

Sve promjenljive u jednačini sistema (6.69) su funkcije vremena, ali zbog jednostavnosti notacije argument promjenljivih se nadalje izostavlja.

Za kontrolabilan sistem (6.69), matrica kontrolabilnosti

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad (\text{rang}\{\mathbf{C}\} = n). \quad (6.70)$$

U opštem slučaju red sistema nije jednak cjelobrojnom umnošku broju ulaza. Tada se n može napisati kao $n = p + qm$ ($p, q \in \mathbb{N}$) gdje vrijedi $p < m$. Da bi se anulirao red sistema u KR r -tog reda, potrebno je da važi $n = rm$. To znači da je u posmatranom opštem slučaju potrebno proširiti sistem do dimenzije $n_e = (q + 1)m = rm$, formiranjem dodatnih $m - p$ stanja. U naučnim radovima se može naći nekoliko načina kako da se riješi ovaj problem [106].

Ovdje će biti prezentiran pristup koji se bazira na realnom proširenju sistema. Naime, potreban red sistema n_e se može dobiti uvođenjem $m - p$ integratora na nekim ulaznim kanalima. To znači da je potrebno $m - p$ integratora po ulaznom signalu. Ovakav pristup dijeli nekoliko korisnih osobina. Najprije, kontrolabilnost sistema ne zavisi od izbora stanja i nova stanja su lahko dostupna za mjerenje. Međutim, najznačajnija korist je da $m - p$ signala regulatora za KR višeg reda, koji obično imaju visokofrekventnu diskretnu komponentu, sada se filtriraju prolaskom kroz integratore, čime se redukuje treperenje. Takode, relativni red sistema se povećava što pogoduje primjeni KR višeg reda. S druge strane, može doći do narušavanja uslova invarijantnosti poremećaja sistema (6.69), što predstavlja negativan efekat.

Neka su integratori postavljeni na prvih $m - p$ ulaza sistema. Tada se novi vektor upravljanja $\mathbf{v}$, kao i inicijalni vektor upravljanja $\mathbf{u}$ mogu dekomponovati kao

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_a, \mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{m-p}, \quad \mathbf{v}_b, \mathbf{u}_b \in \mathbb{R}^p, \quad (6.71)$$

pri čemu vrijedi

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{u}_b = \mathbf{v}_b. \quad (6.72)$$

Shodno tome i matrica $\mathbf{B}$ može se podijeliti kao $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a & \mathbf{B}_b \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_a \in \mathbb{R}^{n \times (m-p)}$, $\mathbf{B}_b \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Ako se prošireni vektor stanja formira kao $\mathbf{x}_e^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top & \mathbf{u}_a^\top \end{bmatrix}$, model proširenog sistema postaje

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{v} + \mathbf{D}_e \mathbf{d}, \quad (6.73)$$

gdje se matrice novog sistema nalaze kao

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.74)$$

Uslov invarijantnosti poremećaja za prošireni sistem može se napisati kao $\text{rang}\{[B_e \ D_e]\} = \text{rang}\{B_e\}$ čije važenje u opštem slučaju ne garantuje inicijalna pretpostavka $\text{rang}\{[B \ D]\} = \text{rang}\{B\}$.

U velikom broju slučajeva je moguće očuvati svojstvo invarijantnosti inicijalnog sistema (6.69) ukoliko se izbjegava postavljanje integratora na ulaznim kanalima gdje djeluju poremećaji. Preuređenjem vektora stanja se u tom slučaju može naći model (6.73) u kome važi uslov invarijantnosti poremećaja. Čak i ako su narušeni uslovi invarijantnosti zbog integratora na ulaznim kanalima gdje djeluju poremećaji, integratori eliminišu konstantne i sporo promjenljive poremećaje.

Vektor upravljanja s m komponenti uslovljava postojanje m kliznih promjenljivih. Vektor $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_m]^\top$ je tada

$$\mathbf{g} = \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e, \quad \mathbf{C}_e \in \mathbb{R}^{m \times n_e}, \quad \mathbf{c}_{ei} \in \mathbb{R}^{1 \times n_e} \quad (i = 1, \dots, m). \quad (6.75)$$

Klizne promjenljive moraju biti linearno nezavisne, što zahtijeva $\text{rang}\{\mathbf{C}_e\} = m$. Relativni red kliznog vektora $\mathbf{g}$ treba biti r da bi se obrazovao KR r -tog reda opisan jednačinom

$$\mathbf{g} = \dot{\mathbf{g}} = \dots = \mathbf{g}^{(r-1)} = 0. \quad (6.76)$$

Zadatak upravljanja je organizovati KR r -tog reda u sistemu (6.73) u konačnom vremenu. Za to je potrebno naći odgovarajuću matricu $\mathbf{C}_e$ i vektor prekidnog upravljanja $\mathbf{v}$ koji obezbjeđuju željeno ponašanje.

Da bi se ostvario KR r -tog reda na potprostoru (6.76), što anulira red dinamike u KR i daje dosezanje koordinatnog početka za konačno vrijeme, vektor klizanja mora biti (6.75) relativnog reda r u odnosu na upravljanje $\mathbf{v}$. Značajno bi bilo ostvariti decentralizovano upravljanje u smislu da svaki upravljački signal utiče samo na jednu promjenljivu klizanja. Ovi zahtjevi se mogu ispuniti adekvatnim izborom matrice $\mathbf{C}_e$. Slično jednačinama (6.44) i (6.45), pokazuje se da se traženi relativni red i raspregnuto upravljanje ostvaruje ukoliko $\mathbf{C}_e$ zadovoljava uslove:

$$\mathbf{C}_e \mathbf{A}_e^i \mathbf{B}_e = \mathbf{0} \quad (i = 0, 1, \dots, r-2), \quad (6.77)$$

$$\mathbf{C}_e \mathbf{A}_e^{r-1} \mathbf{B}_e = \mathbf{I}. \quad (6.78)$$

Prethodni uslovi se mogu napisati u matričnoj formi

$$\mathbf{C}_e \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6.79)$$

gdje je $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e & \mathbf{A}_e \mathbf{B}_e & \dots & \mathbf{A}_e^{r-1} \mathbf{B}_e \end{bmatrix}$ kvadratna matrica.

Korištenjem (6.74), matrica $\mathbf{H}$ se može zapisati u dijagonalnoj formi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.80)$$

gdje je $\mathbf{M}$ n -dimenzionalna kvadratna matrica oblika

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \mathbf{B}_a & \mathbf{A}\mathbf{B}_b & \mathbf{A}\mathbf{B}_a & \mathbf{A}^2\mathbf{B}_b & \dots & \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{B}_a & \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}_b \end{bmatrix}. \quad (6.81)$$

Iz (6.80), inverzna matrica $\mathbf{H}^{-1}$ se može naći kao

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.82)$$

ukoliko je $\text{rang}\{\mathbf{M}\} = n$.

Sređivanjem kolona u $\mathbf{M}$, uslov za ranga $\mathbf{M}$ postaje

$$\text{rang}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}_b \end{bmatrix}\right\} = n. \quad (6.83)$$

tako da se $\mathbf{C}_e$ određuje iz jednačine

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.84)$$

Ovdje je važno naglasiti da vektor kliznih promjeljivih $\mathbf{g}$ definisan sa (6.75) ne zavisi od izlaza ubačenih integratora [107].

Kako je $m < n$, gornji matrični proizvod se sređivanjem može svesti na izraz koji određuje matricu $\mathbf{C}_e$ u formi

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.85)$$

gdje matrica $\mathbf{C}$ predstavlja donjih m vrsta matrice $\mathbf{M}^{-1}$.

Uz uslove (6.77) i (6.78), uzastopni izvodi po vremenu kliznih promjenljivih g_i definisanih sa (6.75) se dobijaju na osnovu (6.73) kao

$$g_i^{(j)} = \mathbf{c}_{ei} \mathbf{A}_e^j \mathbf{x}_e + \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{c}_{ej} \mathbf{A}_e^{j-1-k} \mathbf{D}_e \mathbf{d}^{(k)} \quad (j = 0, 1, \dots, r-1), \quad (6.86)$$

$$g_i^{(r)} = \mathbf{c}_{ei} \mathbf{A}_e^r \mathbf{x}_e + v_i + \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{c}_{ej} \mathbf{A}_e^{r-1-j} \mathbf{D}_e \mathbf{d}^{(j)}. \quad (6.87)$$

Očigledno je da se komponente upravljanja v_i pojavljuju tek u izrazu $g_i^{(r)}$ izvedenom u (6.87). Poređenjem (6.87) sa slučajem sistema sa skalarnim upravljanjem (6.61) i (6.62), upravljanje v_i u (6.87) treba dati

$$g_i^{(r)} = -\gamma_i(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)}) + \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{c}_{ej} \mathbf{A}_e^{r-1-j} \mathbf{D}_e \mathbf{d}^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.88)$$

gdje $\gamma_i(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)})$ su prekidne funkcije koje ostvaruju KR r -tog reda u odnosu na g_i . Neke od ovih funkcija su definisane izrazima (6.63) - (6.67).

Izjednačavanjem desnih strana izraza (6.87) i (6.88), komponente upravljanja v_i se mogu izvesti kao

$$v_i = -\mathbf{c}_{ei} \mathbf{A}_e^r \mathbf{x}_e - \gamma_i(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.89)$$

odnosno u formi vektora

$$\mathbf{v} = -\mathbf{C}_e \mathbf{A}_e^r \mathbf{x}_e - \begin{bmatrix} \gamma_1(g_1, \dot{g}_1, \dots, g_1^{(r-1)}) \\ \gamma_2(g_2, \dot{g}_2, \dots, g_2^{(r-1)}) \\ \vdots \\ \gamma_m(g_m, \dot{g}_m, \dots, g_m^{(r-1)}) \end{bmatrix}. \quad (6.90)$$

Dolazak stanja sistema iz bilo kojeg početnog stanja u koordinatni početak u konačnom vremenu uprkos djelovanju poremećaja je garantovan prekidnim funkcijama. Dužina tog vremena nepredvidiva je kod viševarijabilnih sistema.

Treba primijetiti da upravljanje (6.90) zahtijeva izvode kliznih promjenljivih do $(r-1)$ -og reda, što može zahtijevati primjenu diferencijatora. U tom slučaju se može očekivati pojačanje treperenja što je u svakom slučaju neželjeni efekat.

Ukoliko vrijedi uslov invarijantnosti $\text{rang}\{[B_e \ D_e]\} = \text{rang}\{B_e\}$ u proširenom sistemu (6.73), izvodi promjenljivih klizanja (6.86) tada postaju

$$g_i^{(j)} = c_i A_e^j x_e \quad (j = 0, 1, \dots, r-1). \quad (6.91)$$

Ovdje je važno istaknuti da se izvodi kliznih promjenljivih potrebni za upravljanje (6.90) mogu izračunati korištenjem izraza (6.91) uz poznavanje samo vektora stanja, tako da primjena diferencijatora nije potrebna.

Projektovanje klizne površi [108]

Kod sistema (6.69) za koji vrijedi $D = B$, r -ti izvod klizne promjenljive $g = Cx$ ($C \in \mathbb{R}^{m \times n}$) se dobija kao

$$g^{(r)} = CA^r x + \sum_{j=0}^{r-1} CA^{r-1-j} B(u^{(j)} + d^{(j)}). \quad (6.92)$$

Na osnovu (6.92), klizna promjenljiva g će imati traženi relativni red ukoliko važi sljedeći uslov

$$C \cdot [B \ AB \ \dots \ A^{r-2}B] = 0, \quad (6.93)$$

$$CA^{r-1}B \neq 0. \quad (6.94)$$

Korsiteći jednačine (6.93) i (6.94), r -ti izvod klizne promjenljive definisan sa (6.92) postaje

$$g^{(r)} = CA^r x + CA^{r-1}B(u + d). \quad (6.95)$$

Dinamika sistema u KR r -tog reda je redukovanoj reda koji je jednak $n - mr$. Ekvivalentno upravljanje u_{eq} polaznog sistema se određuje iz jednačine (6.95) na osnovu uslova

$$g^{(r)}|_{u=u_{eq}} = 0, \quad (6.96)$$

te se dobija

$$u_{eq} = -(CA^{r-1}B)^{-1}CA^r x - d. \quad (6.97)$$

Kako je poremećaj d nepoznat, ekvivalentno upravljanje (6.97) se u praksi ne može ostvariti bez tačnog poznavanja poremećaja d . Umjesto poremećaja, potrebno je koristiti prekidne funkcije koje ostvaruju KR r -tog reda u odnosu na g_i kako je to dato u (6.90).

Smjenom ekvivalentnog upravljanja (6.97) u jednačinu sistema (6.69) dobija se opis kretanja sistema u KR r -tog reda

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^r \right) \mathbf{x}. \quad (6.98)$$

Iz jednačine (6.98) slijedi da se ekvivalentno upravljanje (6.97) može sagledati kao tradicionalna povratna sprega po stanju, te se jednačina (6.98), koja opisuje dinamiku sistema u KR višeg reda, može napisati kao

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \right) \mathbf{x} = \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x}. \quad (6.99)$$

gdje $\mathbf{K} = (\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^r$ ($\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$) je matrica pojačanja povratne sprege po stanju koja definiše upravljanje $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$.

Iz definicije matrice pojačanja $\mathbf{K}$ vidi se da postoji određena korelacija s matricom klizne površi $\mathbf{C}$. Dakle, nalaženje matrice $\mathbf{C}$, koja obezbjeđuje željenu dinamiku u KR višeg reda je ekvivalentno određivanju matrice $\mathbf{K}$ povratne sprege po stanju koja obezbjeđuje željenu lokaciju polova spregnutog sistema. Može se pokazati da matrica $\mathbf{A}_{eq}$ će imati mr nulnih sopstvenih vrijednosti za KR r -tog reda što dokazuje da je mogućnost redukovanja reda dinamike kod KRVR veća u odnosu na konvencionalne KR. Ovo znači da će se pojaviti slučaj da je red višestrukosti polova spregnutog sistema veći od broja ulaza u sistem, što predstavlja problem u korištenju nekih standardnih metoda projektovanja povratne sprege po stanju kod viševarijabilnih sistema. Slijedi da odabir koeficijenata matrice $\mathbf{C}$ nije jednostavan niti jednoznačan.

Projektovanje klizne površi podrazumijeva određivanje matrice $\mathbf{C}$ koja dozvoljava nastanak KR višeg reda i ostvaruje željenu dinamiku sistema.

Uslov ostvarenja željene dinamike kretanja sistema je definisan jednačinom $(\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^r = \mathbf{K}$, pod uslovom da je poznata matrica $\mathbf{K}$ koja osigurava željenu dinamiku sistema s povratnom spregom po stanju.

Dobijeni uslov se može napisati u obliku

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \mathbf{0}. \quad (6.100)$$

Takođe, matrica $\mathbf{C}$ treba ispuniti neophodne uslove relativnog reda date sa (6.93) i (6.94). Uslov (6.94) se bez gubitka opštosti može usvojiti kao $\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_m$, gdje je $\mathbf{I}_m$ jedinična matrica.

Sve jednačine koje mora da zadovolji matrica $\mathbf{C}$ mogu se zapisati u matričnoj formi

$$\mathbf{C}\mathbf{L} = \mathbf{\Gamma}, \quad (6.101)$$

gdje su:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-2}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}], \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times (n+rm)},$$

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{I}], \quad \mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times (n+rm)}.$$

Dakle, matricu $\mathbf{C}$ treba naći kao rješenje jednačine (6.101), koja se sastoji od m sistema jednačina, pri čemu svaki sistem čine $n + rm$ jednačina s n nepoznatih, koje su elementi vrsta matrice $\mathbf{C}$. Svaki sistem će imati rješenje ukoliko je broj linearno nezavisnih jednačina manji ili jednak broju nepoznatih, što je u ovom slučaju n .

Razmatrajući (6.101), bar jedno rješenje za matricu $\mathbf{C}$ postoji ako je zadovoljena jednačina

$$\text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \right\} = \text{rang} \{ \mathbf{L} \}. \quad (6.102)$$

Ukoliko vrijedi $\text{rang} \{ \mathbf{L} \} = n$, rješenje jednačine (6.101) za matricu $\mathbf{C}$ je jedinstveno.

U cilju sagledavanja mogućnosti postojanja rješenja jednačine (6.101) potrebno je inicijalno procijeniti broj linearno nezavisnih jednačina. Zato će se nezavisno analizirati jednačine koje matrica $\mathbf{C}$ mora da zadovolji. Kada je $\text{rang} \{ \mathbf{A} \} = n$, onda je $\text{rang} \{ \mathbf{A}^{r-1}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \} = \text{rang} \{ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{A}_{eq} \} = n - rm$, pošto je $\text{rang} \{ \mathbf{A}_{eq} \} = n - rm$. Ovo ukazuje da (6.100) ima $n - m$ linearno nezavisnih jednačina.

Jednačina (6.94) doprinosi još dodatnih m linearno nezavisnih jednačina. Na osnovu ovoga je lahko zaključiti da linearno nezavisne jednačine iz (6.93) u odnosu na cjelokupni sistem čine da broj ukupnih linearno nezavisnih jednačina prevazilazi n . To znači da u opštem slučaju treba očekivati da će pridruživanje matrice $\mathbf{\Gamma}$ matrici $\mathbf{L}$ u (6.102) povećati rang proširene matrice što daje

$$\text{rang} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \right\} > \text{rang} \{ \mathbf{L} \} = n. \quad (6.103)$$

i sistem u opštem slučaju nema rješenje.

Međutim, potrebno je ispitati da li postoji specifičan slučaj kada sistem jednačina ipak ima rješenje. Jedan način određivanja matrice $\mathbf{C}$ će biti prikazan u nastavku.

Za potrebe metode koriste se indeksi kontrolabilnosti, koje je u teoriju upravljanja uveo Kroneker [109] a dalje elaborirao Kalman [110]. Ukoliko je polazni sistem kontrolabilan, matrica kontrolabilnosti (6.70) posjeduje n linearno nezavisnih kolona, koje se mogu izdvojiti u kvadratnu matricu $\mathbf{C}_r$ koja se naziva redukovana matrica kontrolabilnosti. Ova matrica se formira u obliku

$$\mathbf{C}_r = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{A}^{r_1-1}\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_m \ \mathbf{A}\mathbf{b}_m \ \dots \ \mathbf{A}^{r_m-1}\mathbf{b}_m], \quad (6.104)$$

gdje je $\mathbf{b}_i$ ($i = 1, \dots, m$) i -ta kolona matrice $\mathbf{B}$.

U matrici (6.104), cjelobrojne vrijednosti r_i ($i = 1, \dots, m$) predstavljaju indekse kontrolabilnosti, pri čemu se svaki indeks r_i odnosi na i -tu kolonu matrice $\mathbf{B}$ i određuje iz (6.104). U [111], pokazano je da vrijedi $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Neka se posmatra slučaj kada su u polaznom sistemu indeksi kontrolabilnosti međusobno jednaki i jednaki redu željenog KR višeg reda što je opisano jednačinom

$$r = r_1 = r_2 = \dots = r_m. \quad (6.105)$$

Kako je $\sum_{i=1}^m r_i = n$, iz (6.105) slijedi $\sum_{i=1}^m r_i = mr = n$. Sada, uslov (6.105) se može razložiti na dva zahtjeva

$$r_i = n/m \ (i = 1, \dots, m), \quad mr = n. \quad (6.106)$$

Red sistema n treba biti djeljiv brojem ulaza m . Takođe, pošto ima mr nultih sopstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{eq}$ za KR r -tog reda, u ovom slučaju svih n sopstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{eq}$ moraju biti jednaki nuli. Redukovana matrica kontrolabilnosti $\mathbf{C}_r$ u slučaju (6.105) postaje

$$\mathbf{C}_r = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}], \quad (6.107)$$

koja ima puni rang ($\text{rang}\{\mathbf{C}_r\} = n$).

Koristeći matricu (6.107), bez umanjenja opštosti uslovi (6.93) i (6.94) se mogu zapisati kao matrična jednačina

$$\mathbf{C}\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (6.108)$$

odakle se zbog osobina redukovane matrice kontrolabilnosti $\mathbf{C}_r$ može zapisati

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C}_r^{-1}. \quad (6.109)$$

Ovaj rezultat pokazuje da se matrica $\mathbf{C}$ se može naći iz matrične jednačine (6.109) koja ima jedinstveno rješenje koje istovremeno zadovoljava željenu dinamiku sistema u KR višeg reda i neophodan relativni red.

Posmatrajući jednačinu (6.108) vrijedi $\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_m$ tako da se matrica $\mathbf{K}$ može izračunati kao

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^r = \mathbf{C}\mathbf{A}^r. \quad (6.110)$$

Primjer 6.5

Kao što je pokazano prethodnom analizom, da bi se u linearnom sistemu s više ulaza organizovao KR višeg reda duž odgovarajuće klizne površi potrebno je da objekat upravljanja zadovoljava strukturalne zahtjeve (6.106). Kao primjer biće razmatran proizvoljni dinamički sistem šestog reda opisan matricama

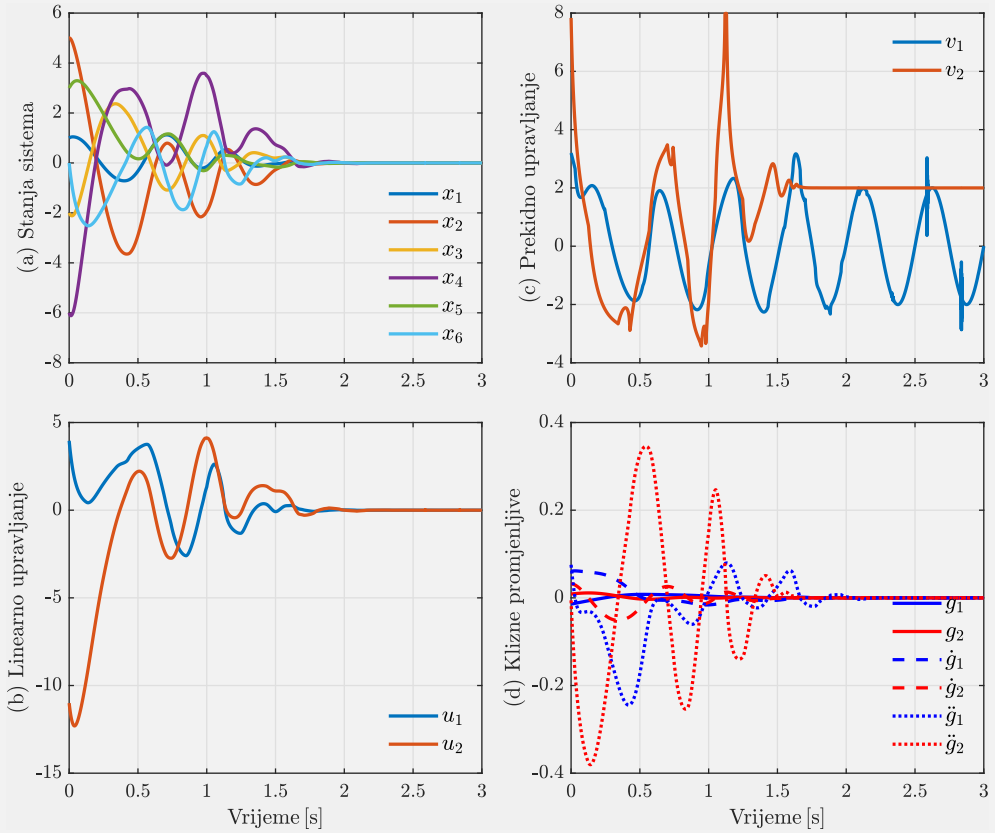
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -0.5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 8 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 0.5 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 0.5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0.5 & 1 & 3 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sistem je potpuno kontrolabilan, matrica $\mathbf{A}$ je nestabilna i singularna, te vrijedi $\text{rang}(\mathbf{B}) = m = 2$. Iz redukovane matrice kontrolabilnosti (6.107) se mogu odrediti indeksi kontrolabilnosti kao $r_1 = r_2 = 3$, te u slučaju KR trećeg reda ($r = 3$) uslov (6.105) je zadovoljen. To znači da se može naći klizna površ koja obezbjeđuje traženi relativni red $r = 3$ i odgovarajuću dinamiku sistema. Kako je $n - rm = 0$, sve sopstvene vrijednosti spregnutog sistema trebaju biti jednake nuli. Matrica klizne površi $\mathbf{C}$ se može naći korištenjem (6.109) kao

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.0148 & -0.0061 & 0.0015 & -0.0023 & -0.0030 & -0.0003 \\ -0.0074 & 0.0033 & -0.0001 & 0.0020 & 0.0038 & -0.0010 \end{bmatrix}.$$

Lahko se može verifikovati da ovako dobijeno $\mathbf{C}$ zadovoljava jednačinu (6.101). Upravljanje koje uspostavlja KR trećeg reda za dati sistem je realizovano kao (6.90), gdje su funkcije $\gamma_i(g, \dot{g}, \ddot{g})$ ($i = 1, 2$) date sa (6.65). Odabrani parametri su $\alpha_{1,1} = 5$, $\beta_{1,1} = 0.35$, $\beta_{2,1} = 0.65$, $\alpha_{1,2} = 8$, $\beta_{1,2} = 1$ i $\beta_{2,2} = 2$.

U ispitivanju performansi projektovanog regulatora, posmatraće se kretanje sistema iz početnog stanja $\mathbf{x}(0) = [1 \ 5 \ -2 \ -6 \ 3 \ 0]^\top$ pri djelovanju vektora vanjskog poremećaja $\mathbf{d}(t) = [2 \sin 4\pi t \ 2h(t-1)]^\top$.



Slika 6.5. Signali stanja sistema, kliznih promjenljivih, linearnog i prekidnog upravljanja

Na slici 6.5 su prikazani signali stanja sistema, komponenti vektora upravljanja, te vektora klizne promjenljive i njegovi prvi i drugi izvodi po vremenu. Očigledno je da svi ovi signali postaju jednaki nuli za konačno vrijeme, što ukazuje da nastaje KR trećeg reda za konačno vrijeme duž površi $g = \dot{g} = \ddot{g} = 0$.

Kako primijenjeno upravljanje obezbjeđuje sve nulte sopstvene vrijednosti sistema u KR višeg reda, ostvarena je konvergencija promjenljivih stanja u koordinatni početak za konačno vrijeme. Ovakvo upravljanje redukuje red dinamike u KR na nulu, zbog čega se naziva i upravljanje u konačnom vremenu.

Projektovanje klizne površi primjenom dekompozicije viševarijabilnog sistema na više sistema s jednim ulazom [27]

Mogućnost redukcije reda dinamike u KR višeg reda je veća u odnosu na konvencionalni KR. Pokazano je da kod KR r -tog reda, matrica $\mathbf{A}_{eq}$ će imati mr nultih sopstvenih vrijednosti. To znači da se može pojaviti slučaj da je red višestrukosti polova spregnutog sistema veći od broja ulaza u sistem, što predstavlja problem u korištenju nekih standardnih metoda projektovanja povratne sprege po stanju viševarijabilnih sistema.

Efikasna metoda projektovanja povratne sprege po stanju koja rješava problem višestrukosti polova je predložena u [27]. Takođe, predloženi metod daje mogućnost primjene algoritama razvijenih za sisteme sa skalarnim upravljanjem u viševarijabilnim sistemima. Bez umanjenja opštosti, metoda će biti prezentovana za kontrolabilan sistem (6.69) bez poremećaja ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$). U [105] je pokazano da isti pristup može biti uspješno primijenjen i na viševarijabilne sisteme uz prisustvo poremećaja koji zadovoljavaju uslove invarijantnosti.

Metoda se zasniva na dekompoziciji sistema koristeći indekse kontrolabilnosti. Matrica kontrolabilnosti $\mathbf{C}$ definisana (6.70) ima n linearno nezavisnih kolona koje se mogu izdvojiti tako da formiraju kvadratnu redukovanu matricu kontrolabilnosti (6.104). Iz te matrice može se izračunati vektor indeksa kontrolabilnosti označen kao $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]$, koji su definisani u prethodnom odjeljku.

Za potrebe izvođenja metoda, potrebno je definisati vektor pomoćnih izlaza y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) sistema (6.69) kao

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (6.111)$$

gdje je $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ i -ti vektor red matrice $\mathbf{C}$.

Kada su određeni indeksi kontrolabilnosti, matrica $\mathbf{C}$ se određuju iz uslova tako da elementi $\mathbf{y}$ čine skup pomoćnih izlaza određenih relativnim redovima. Tačnije, relativni red svakog y_i treba da bude jednak r_i [112].

Prema (6.69) i (6.111), r_i -ti izvod y_i je

$$y_i^{(r_i)} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i} \mathbf{x} + \sum_{j=0}^{r_i-1} \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-1-j} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(j)}. \quad (6.112)$$

Pomoćni izlazi y_i imaju relativne redove jednake r_i ako vrijedi

$$\mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-1-j} \mathbf{B} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r_i - 1), \quad (6.113)$$

odnosno ekvivalentno

$$\mathbf{c}_i [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{r_i-2}\mathbf{B}] = 0. \quad (6.114)$$

Kada se prethodni uslovi uvrste u (6.111), izvodi pomoćnih izlaza postaju

$$y_i^{(j)} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^j \mathbf{x} \quad (j = 0, 1, \dots, r_i - 1), \quad (6.115)$$

$$y_i^{(r_i)} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i} \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (6.116)$$

Na ovaj način, sistem (6.69) se razlaže na m podsistema S_i . Prema [113], to je moguće ako i samo ako $\det \{\mathbf{W}\} \neq 0$, gdje je matrica $\mathbf{W}$ definisana kao

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{r_1-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{r_2-1} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}^{r_m-1} \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (6.117)$$

Prethodno razvezivanje je trougaono [114] ako je ispunjen uslov

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B} = [\mathbf{0} \ 1 \ \boldsymbol{\omega}] \quad (i = 1, \dots, m), \quad (6.118)$$

pri čemu je $\boldsymbol{\omega} = [\omega_{i,i+1} \ \omega_{i,i+2} \ \dots \ \omega_{i,m}]$, $\omega_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $i < j \leq m$).

Uvrštavanjem (6.118) u (6.117), matrica $\mathbf{W}$ postaje gornja trougaona matrica s jedinicama na dijagonali pa je $\det \{\mathbf{W}\} = 1$ i $\mathbf{W}$ je punog ranga.

Jednačine (6.114) i (6.118) čine skup mr_i linearnih jednačina s n nepoznatih elemenata u redovima $\mathbf{c}_i$. Ovakvih skupova postoji m . Svaki skup ima rješenje ako je broj linearno nezavisnih jednačina manji ili jednak n .

Koristeći vektor indeksa kontrolabilnosti $\mathbf{r}$, može se pokazati da je broj linearno nezavisnih jednačina u (6.114) jednak $n_i = \sum_{j=1}^{m-1} r_j$. Preostalih $(n - n_i)$ jednačina se mogu uzeti iz (6.118). Međutim, samo prvih i jednačina su linearno nezavisne, dok ostale ne moraju biti.

Stoga se vektor vrsta $\boldsymbol{\omega}$ ne može proizvoljno pretpostaviti za svaki podsistem, tako da se jednačine (6.118) mogu kraće zapisati u obliku

$$\mathbf{c}_i [\mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{b}_i] = [\mathbf{0}_{1 \times (i-1)} \quad 1]. \quad (6.119)$$

Sada, uslovi (6.114) i (6.118) mogu se prepisati kao

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{0}_{1 \times m(r_i-1)} \quad \mathbf{0}_{1 \times (i-1)} \quad 1] \mathbf{C}_i^\dagger, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.120)$$

gdje znak † označava operaciju desne pseudoinverzije, a matrica $\mathbf{C}_i$ je definisana kao

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_i-2} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B}_i], \quad (6.121)$$

pri čemu je $\mathbf{B}_i$ fragment matrice $\mathbf{B}$ definisan kao $\mathbf{B}_i = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_i]$.

Prethodna analiza je pokazala da se iz jednačine (6.120) može odrediti matrica $\mathbf{C}$ koja definiše pomoćne izlaze definisane sa (6.111) kod kojih relativni red svakog y_i je jednak indeksu kontrolabilnosti r_i . Ostaje da se vidi kako obezbijediti kretanje zatvorenog sistema s dinamikom željenog reda koji može biti manji ili jednak redu sistema n .

Željena dinamika sistema se opisuje željenim spektrom polova iz skupa S . Skup S treba podijeliti u m podskupova S_i , pri čemu se kompleksni polovi mogu pojavljivati samo u parovima.

Očigledno, broj polova N_i u podskupu S_i mora da zadovolji uslove

$$0 \leq N_i \leq r_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.122)$$

Za svaki podskup S_i mogu se definisati diferencijalne jednačine reda N_i čije su karakteristične vrijednosti date u skupu S_i kao:

$$y_i^{(N_i)} + \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{i,j} y_i^{(j-1)} = P_i(y_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6.123)$$

gdje su $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ odgovarajući koeficijenti.

Pošto (6.123) definiše željenu dinamiku kretanja sistema u KR višeg reda, klizne promjenljive $g_i(\mathbf{x})$ se uzimaju kao

$$g_i(\mathbf{x}) = P_i(y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.124)$$

Red jednačine (6.116) je r_i , dok je red jednačine (6.123) jednak N_i . Stoga je red KR $q_i = r_i - N_i$. To znači da treba naći upravljački vektor $\mathbf{u}$ koji obezbjeđuje da svaki izvod g_i do q_i -tog reda bude jednak nuli duž klizne površi $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

q_i -ti izvod klizne promjenljive $g_i(\mathbf{x})$ definisan je sa

$$\left(g_i(\mathbf{x})\right)^{(q_i)} = \left(P_i(y_i)\right)^{(q_i)} = y_i^{(r_i)} + \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{i,j} y_i^{(j-1)}. \quad (6.125)$$

Uvrštavanjem izvoda y_i datih u (6.115) i (6.116) u (6.125), dobija se

$$\left(g_i(\mathbf{x})\right)^{(q_i)} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i} \mathbf{x} + \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{i,j} \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-j} \mathbf{x} + \mathbf{w}_i \mathbf{u}, \quad (6.126)$$

ili kraće

$$\left(g_i(\mathbf{x})\right)^{(q_i)} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{q_i} P_i(\mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{w}_i \mathbf{u} = \mathbf{m}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i \mathbf{u}. \quad (6.127)$$

Jednačine (6.124) i (6.127) predstavljaju ekvivalentnu dinamiku sistema u prostoru $\{g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(q_i-1)}\}$. Vektor vrsta $\mathbf{m}_i$ definiše q_i polova u nuli i N_i Hurvicovih polova. To je analog Akermanove formule za MI LTI sistem.

Ako se pretpostavi da postoji upravljanje $v_i(\gamma_i)$ gdje $\gamma_i(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(q_i-1)})$ su prekidne funkcije definisane sa (6.63) - (6.67) koje garantuje pojavu KR reda q_i u konačnom vremenu τ_i , onda vrijedi uslov

$$\left(g_i(\mathbf{x})\right)^{(q_i)} = v_i(\gamma_i). \quad (6.128)$$

Ove jednačine predstavljaju sistem opisan s m autonomnih, razvezanih, nelinearnih diferencijalnih jednačina, svaka reda q_i . Ukupan red sistema je

$$\sum_{i=1}^m q_i = \sum_{i=1}^m (r_i - N_i) = n - N, \quad (6.129)$$

gdje $N = \sum_{i=1}^m N_i$ predstavlja broj polova koji definišu rezultujuću dinamiku KR.

Kombinujući jendačine (6.127) i (6.128), dobija se

$$\mathbf{m}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i \mathbf{u} = v_i(\gamma_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6.130)$$

Neka su $\mathbf{m}_i$ i $v_i(\gamma_i)$ redovi matrice $\mathbf{M}$ i vektora $\mathbf{v}$, respektivno. Tada se posljednja jednačina može predstaviti u matričnoj formi kao

$$\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad (6.131)$$

koja ima jedinstveno rješenje za upravljački vektor $\mathbf{u}$, budući da je kvadratna matrica $\mathbf{W}$ invertibilna. Upravljački vektor $\mathbf{u}$ može se dobiti kao

$$\mathbf{u} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{v}. \quad (6.132)$$

U posljednjoj jednačini matrica povratne sprege stanja $\mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}$ određuje dinamiku zatvorene petlje. Ako se želi dodijeliti N željenih polova sistema zatvorene petlje, tada se matrica $\mathbf{K}$ može izračunati korištenjem relacija $\mathbf{w}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i-1} \mathbf{B}$ i $\mathbf{m}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{q_i} P_i(\mathbf{A})$, gdje q_i predstavlja red stabilne prekidne funkcije (6.128) i zadovoljava (6.129). Izbor q_i nije jedinstven, pa su zanimljiva tri slučaja izbora N željenih polova:

- Slučaj $N = 0$ nastupa za $q_i = r_i$ pri čemu će klizne promjenljive biti jednake pomoćnim izlazima $g_i(\mathbf{x}) = y_i = \mathbf{c}_i \mathbf{x}$. Redovi matrice $\mathbf{M}$ postaju $\mathbf{m}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{r_i}$, a matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ je nilpotentna matrica s indeksom $\max(r_i)$. Komponente $\mathbf{v}_i$ su prekidne funkcije reda q_i , pri čemu je $\sum_{i=1}^m q_i = n$. Rezultujuća dinamika KR ima nulti red, ostvareno kretanje sistema je kretanje u KR višeg reda i poznato je kao upravljanje u konačnom vremenu (eng. *Finite-Time Control*). U [105] pokazano je da i uz prisustvo poremećaja pomoćni izlazi konvergiraju ka ravnotežnom stanju. Pošto se koriste prekidne funkcije, projektovani regulator je složen, ali je robustnost veoma zadovoljavajuća.
- Slučaj $0 < N < n$ predstavlja najopštiji slučaj i može se posmatrati kao kombinovano projektovanje regulatora, gdje se klizni red i dinamika za svaki podsistem mogu proizvoljno birati. Rezultujuća dinamika zatvorene petlje je smanjenog reda u odnosu na red sistema n . Neka je zadana dinamika KR s $N < n$ svojstvenih vrijednosti. Svaki podsistem može imati N_i željenih polova tako da $\sum_{i=1}^m N_i = N$. Izbor N_i može biti proizvoljan i nije jedinstven.

Ako je N_i nekog podsistema manji od njegovog relativnog reda r_i , tada se moraju primijeniti prekidne funkcije reda $q_i = r_i - N_i$. Ovo može biti kritično kada je red stabilne prekidne funkcije manji od relativnog reda posmatranog podsistema. U tom slučaju redovi matrice $\mathbf{M}$ postaju $\mathbf{m}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{q_i} P_i(\mathbf{A})$, a sistem zatvorene petlje ima N željenih polova i $n - N$ polova u nuli. Prednost ovog pristupa je upotreba prekidnih funkcija nižeg reda koje će osigurati zadovoljavajuću robusnost sistema. Ostvareno kretanje sistema u KR neće imati konačno vrijeme konvergencije, ali će biti dosta brže od asimptotske konvergencije s linearnim upravljanjem.

- Slučaj $N = n$ odgovara metodu konvencionalnog podešavanja polova (eng. *Pole Placement*) kod viševarijabilnih sistema. U ovom slučaju vrijedi da je $q_i = 0$ tako da upravljanje sistema nema prekidnih funkcija. Klizna promjenljiva je polinom N_i -tog reda $g_i(\mathbf{x}) = P_i(y_i)$ gdje je $\sum_{i=1}^m N_i = n$. Redovi matrice $\mathbf{M}$ postaju $\mathbf{m}_i = \mathbf{c}_i P_i(\mathbf{A})$, a svojstvene vrijednosti matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ su jednake željenim polovima koji mogu imati proizvoljnu višestrukost. S obzirom na to da ovaj pristup nema prekidne funkcije, robusnost sistema neće biti ostvarena.

Primjer 6.6

Prethodni postupak projektovanja upravljanja ilustrovan je u ovom primjeru kroz simulacije upravljanja objektom koji predstavlja linearizirani model aviona definisan matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.054 & -0.171 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.856 & -1.013 \\ 0 & -0.291 & 0 & 1.0532 & -0.686 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.66 \\ 1.575 & 0 & -0.073 \end{bmatrix}.$$

Sistem je upravljiv, a polovi otvorene petlje su $\{0, -0.78 \pm j1.0296, -0.0176 \pm j0.1826\}$. Za početni vektor stanja usvojen je $\mathbf{x}_0 = [10 \ -5 \ 0 \ -10 \ 5]^\top$, te se želi regulisati stanje sistema na nulu.

Uticaj poremećaja na sistem je takođe razmatran, pa je definisan kao $\mathbf{d}(t) = [0.5 \cos(4\pi t)h(t-3) \ \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)h(t-6) \ -1.5h(t-4.5)]^\top$, gdje je $h(t)$

Hevisajdova odskočna funkcija. Poremećaj ima složenu strukturu i sastoji se od harmonijskih oscilacija niskih i viših frekvencija, kao i konstantnog dijela. Na ovom primjeru biće prikazana sva tri predložena projektovanja upravljanja: konvencionalno projektovanje postavljanjem polova, projektovanje s ciljem anuliranja dinamike sistema i kombinovano projektovanje.

Indeksi kontrolabilnosti se određuju provjerom linearne nezavisnosti kolona matrice kontrolabilnosti $\mathbf{C}$ definisane u (6.70). Vektor indeksa kontrolabilnosti glasi $\mathbf{r} = [2 \ 1 \ 2]$.

Korištenjem (6.120) i (6.117), matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{W}$ se dobijaju kao

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.224 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0038 & 0.0869 \\ -1.928 & 0 & -0.687 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.3757 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Projektovanje upravljanja podešavanjem polova

Projektovanje upravljanja metodom podešavanja polova prikazano je sa svim polovima jednakim -2 . Riječ je o konvencionalnom projektovanju upravljanja i koristi se kao dobar primjer za komparativnu analizu.

Matrica $\mathbf{M}$ je definisana kao

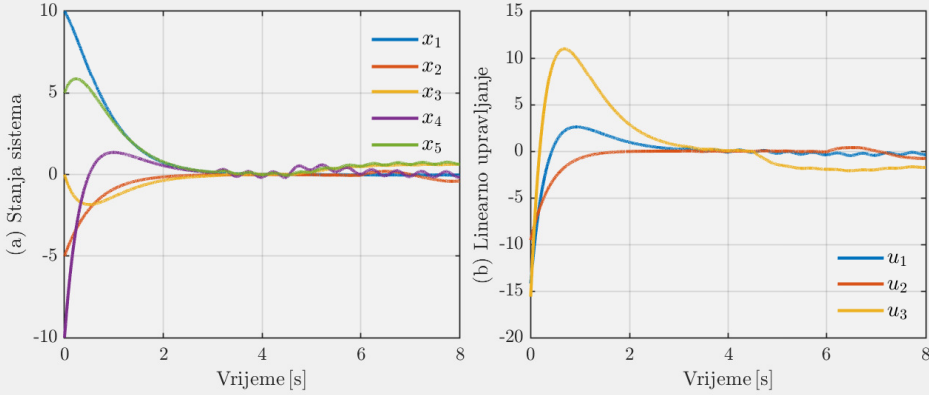
$$\mathbf{M}_{PP} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2 \\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \\ \mathbf{c}_3(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.91 & 0.71 & -0.23 \\ 0 & 1.92 & -0.17 & 0.09 & 0.189 \\ -7.7 & -0.6 & -11.5 & -2.3 & 7.1 \end{bmatrix},$$

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica. Matrica pojačanja $\mathbf{K}$ u ovom pristupu je

$$\mathbf{K}_{PP} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}_{PP} = \begin{bmatrix} -2.89 & -0.21 & -3.41 & -0.16 & 2.43 \\ 0 & 1.92 & -0.17 & 0.09 & 0.19 \\ -7.7 & -0.59 & -11.5 & -2.31 & 7.09 \end{bmatrix}.$$

Vremenski odzivi stanja sistema i upravljačkih ulaza u ovom slučaju su prikazani na slici 6.6.

Može se uočiti da stanja asimptotski konvergiraju ka ishodištu iz početnih uslova, pri čemu je vrijeme smirivanja približno 4s. U ovom slučaju, uticaj poremećaja ne može biti eliminisan.



Slika 6.6. Signali stanja sistema i linearnog upravljanja

Projektovanje upravljanja u konačnom vremenu

U ovom slučaju, matrica M ima oblik

$$M_{FT} = \begin{bmatrix} c_1 A^2 \\ c_2 A \\ c_3 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.011 & 0 & -0.178 & -0.253 \\ 0 & -0.079 & -0.17 & 0.095 & 0.015 \\ 0 & -0.594 & 0 & 0.436 & -0.627 \end{bmatrix},$$

dok matrica pojačanja K ima vrijednost

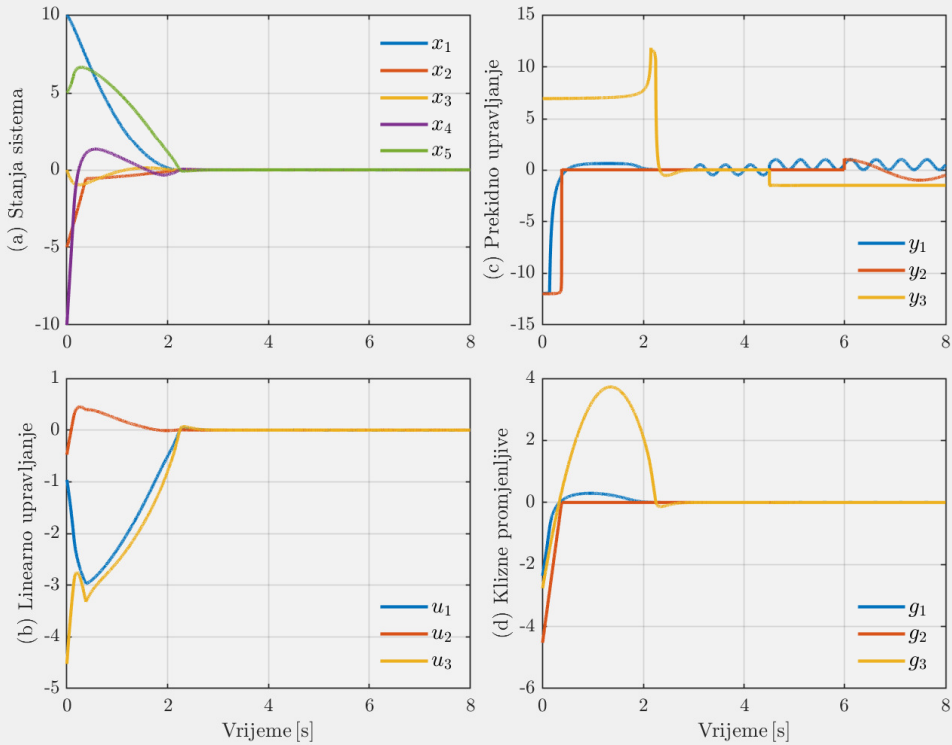
$$K_{FT} = W^{-1} M_{FT} = \begin{bmatrix} 0 & -0.213 & 0 & -0.0298 & -0.465 \\ 0 & -0.079 & -0.17 & 0.095 & 0.015 \\ 0 & -0.59 & 0 & 0.436 & -0.624 \end{bmatrix}.$$

Vektor upravljanja se formira prema (6.132), pri čemu komponente vektora upravljanja v predstavljaju Levantove funkcije date relacijama (6.63)-(6.65). Na osnovu indeksa kontolabilnosti, prvi i treći podsistem koriste regulator KR drugog reda, dok drugi podsistem koristi regulator KR prvog reda:

$$v_i = \alpha_i \frac{c_i A x + \beta_i |c_i x|^{1/2} \text{sign}(c_i x)}{|c_i A x| + \beta_i |c_i x|^{1/2} + \varepsilon}, \quad i \in \{1, 3\},$$

$$v_2 = \alpha_2 \frac{c_2 x}{|c_2 x| + \varepsilon}.$$

Vremenski odzivi stanja, upravljačkih signala, te kliznih promjenljivih prikazani su na slici 6.7. Ovdje se uočava konvergencija stanja sistema ka ishodištu u konačnom vremenu, pri čemu je uticaj poremećaja eliminisan.



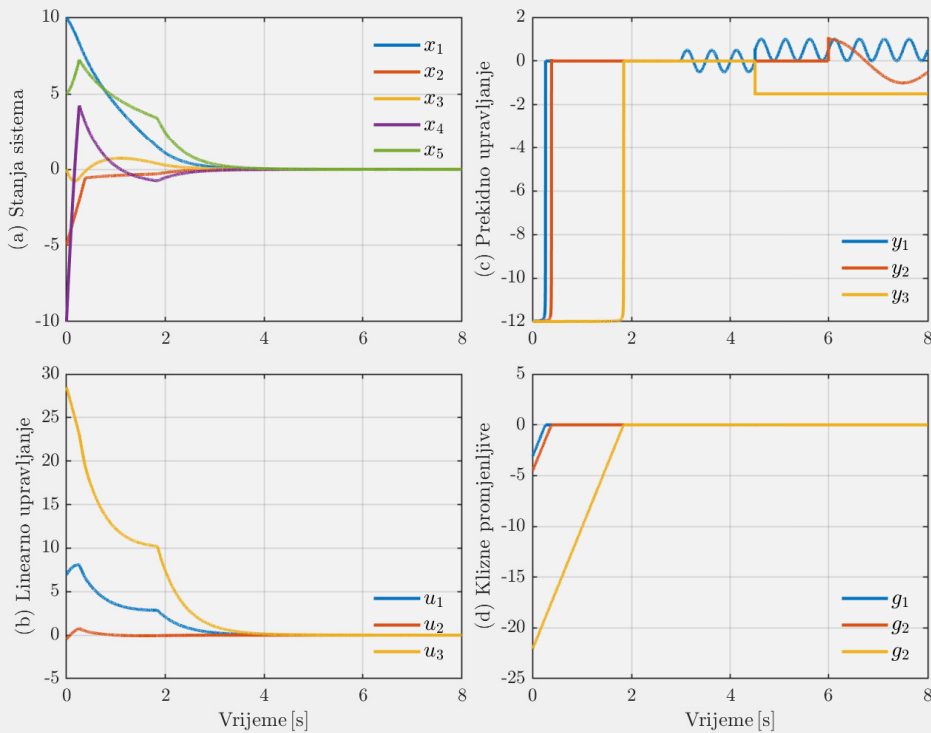
Slika 6.7. Signali stanja sistema, kliznih promjenljivih i upravljanja

Kombinovano projektovanje upravljanja

Razmatra se slučaj kad su dva pola zatvorene petlje jednaka -2 . Podešavanje po jednog pola će biti izvršeno u prvom i trećem podsistemu. Na ovaj način u svim podsistemima će biti organizovan KR prvog reda ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$), tako da će dinamika podsistema sa zatvorenom petljom biti opisana polovima $\{0, -2\}$, $\{0\}$ i $\{0, -2\}$. Za sve podsisteme, korišten je regulator KR prvog reda iz prethodnog slučaja. Matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ imaju vrijednost

$$\mathbf{M}_{CC} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_3 \mathbf{A} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.286 & -0.01 & 0.479 & 0.626 & 0.034 \\ 0 & -0.08 & -0.17 & 0.095 & 0.015 \\ 0 & -0.59 & 0 & 0.436 & -0.627 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{K}_{CC} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}_{CC} = \begin{bmatrix} -0.286 & -0.212 & 0.479 & 0.77 & -0.178 \\ 0 & -0.079 & -0.17 & 0.095 & 0.015 \\ 0 & -0.59 & 0 & 0.436 & -0.627 \end{bmatrix}.$$



Slika 6.8. Signali stanja sistema, kliznih promjenljivih i upravljanja

Vremenski odzivi stanja sistema, linearnih i prekidnih upravljačkih signala, te kliznih promjenljivih prikazani su na slici 6.8. Ostvareno kretanje sistema nema konačno vrijeme konvergencije kao za prethodni slučaj, ali konvergira dosta brže od asimptotske konvergencije s linearnim upravljanjem. Međutim, važno je spomenuti da je i u ovom slučaju uticaj poremećaja eliminisan i da su prekidne funkcije jednostavnije nego kod upravljanja u konačnom vremenu. Iz signala prekidnog upravljanja, i kod upravljanja u konačnom vremenu i kod kombinovanog upravljanja, može se uočiti signal koji ima identičnu promjenu kao signal vanjskog poremećaja. Upravo prekidno upravljanje predstavlja kompenzaciono upravljanje koje osigurava robusnot sistema na smetnje koje zadovoljavaju uslove invarijantnosti što je i pokazano u naučnom radu [105] na sličnom primjeru.

★ ★ ★ ★ ★

7. Opserveri na bazi KR

U SUPS, algoritam upravljanja se formira na osnovu svih koordinata stanja objekta upravljanja. Neka od stanja nisu uvijek dostupna za neposredno mjerenje, te se moraju estimirati odgovarajućim opserverom ili estimatorom stanja. U teoriji upravljanja, svrha opservera jeste procjena nemjerljivih stanja sistema isključivo na osnovu izmjerenih izlaza i ulaza. U suštini, opserver predstavlja matematičku repliku sistema, pobuđenu istim ulaznim signalom kao i stvarni sistem, uz dodatni korekcionni signal koji predstavlja razliku između izmjerenog izlaza sistema i izlaza opservera.

Opserver stanja može biti: (i) punog reda, kada se estimiraju sve koordinate stanja upravljanog objekta, (ii) redukovano reda, kada se estimiraju samo nedostajuće za neposredno mjerenje koordinate, (iii) prošireni opserver, koji, pored svih koordinata stanja, estimira i poremećaj.

Prošireni opserveri se zasnivaju na pretpostavci da se unaprijed ne zna dinamika poremećaja, koji postaje dodatna koordinata stanja, ali uz pretpostavku da je dinamika poremećaja mnogo sporija od dinamike sistema, a samim tim i od dinamike opservera stanja koji je brži od dinamike sistema upravljanja. U najprostijem slučaju, pretpostavlja se da je poremećaj konstantan ili je nepoznat njegov intenzitet. Prema tome, dodatna koordinata stanja sistema u kontinualnom domenu se opisuje relacijom $\dot{x}_{n+1}(t) = \dot{f}(t)$.

U najranijim konstrukcijama opservera, koje se pripisuju Luenbergeru [115], ova razlika između izlaza sistema i procijenjenog izlaza opservera vraća se u opserver na linearan način. Međutim, u prisustvu nepoznatih signala ili nemodelirane dinamike, Luenbergerov opserver nije u stanju da svede grešku procjene izlaza na nulu te na taj način ne osigurava konvergenciju stanja opservera ka stvarnim stanjima sistema. Opserver na bazi KR, koji grešku procjene izlaza vraća u sistem putem nelinearnog prekidnog člana, predstavlja efikasno rješenje ovog problema.

Pod uslovom da je poremećaj ograničen, opserver na bazi KR može dovesti grešku procjene izlaza na nulu u konačnom vremenu, dok stanja opservera asimptotski konvergiraju ka stanjima sistema. U okviru ovog poglavlja biće prezentiran Luenbergerov opserver sa svojim prednostima i nedostacima, te neka najinteresantnija rješenja opservera na bazi KR.

7.1. Luenbergerov opserver

Neka se razmatra linearni vremenski nepromjenljivi sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (7.2)$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ vektor mjerljivih izlaza sistema, a $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ poznati vektor upravljanja. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ su poznate i imaju odgovarajuće dimenzije. Pretpostavlja se da je par $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ opservabilan.

Standardni Luenbergerov opserver za polazni sistem dat je sa

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \quad (7.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (7.4)$$

gdje je $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrica pojačanja opservera.

Greška estimacije po stanju $\hat{\mathbf{x}}$ definisana kao

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (7.5)$$

ima promjenu opisanu diferencijalnom jednačinom

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t). \quad (7.6)$$

Da bi greška estimacije $\mathbf{e}$ asimptotski konvergirala ka nuli, matrica $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ mora biti Hurwitzova matrica (imati sve sopstvene vrijednosti manje od nule). Ovo je moguće postići odabirom matrice pojačanja $\mathbf{L}$ koja uvijek postoji zbog pretpostavljene opservabilnosti sistema. Slijedi da za sistem definisan sa (7.1) i (7.2), bez ikakvih poremećaja, standardni Luenbergerov opserver je dovoljan za asimptotsku estimaciju stanja.

Neka na linearni vremenski nepromjenljivi sistem iz (7.1) djeluje vanjski poremećaj $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$ na način kako je to opisano jednačinom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{D} \neq \mathbf{0}, \quad (7.7)$$

gdje matrica $\mathbf{D}$ ima odgovarajuće dimenzije. Neka je poremećaj $\mathbf{w}(t)$ ograničen i neka vrijedi $\|\mathbf{w}(t)\| \leq \Delta \in \mathbb{R}$.

Ako se koristi Luenbergerov opserver definisan sa (7.3), tada dinamika greške estimacije je opisana jednačinom

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t). \quad (7.8)$$

Radi analize konvergencije opservera u ovom slučaju, razmatra se funkcija Ljapunova oblika

$$V = \mathbf{e}^\top \mathbf{P} \mathbf{e}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0. \quad (7.9)$$

Izračunavanjem prvog izvoda funkcije V dobijamo

$$\dot{V} = \mathbf{e}^\top \mathbf{P} \left((\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{w} \right) + \left((\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{w} \right)^\top \mathbf{P} \mathbf{e}. \quad (7.10)$$

Ako se pretpostavi da je matrica $\mathbf{P}$ rješenje jednačine Ljapunova

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})^\top \mathbf{P} = -\mathbf{H} \quad (7.11)$$

za neku $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\top > 0$, tada prvi izvod funkcije V postaje

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^\top \mathbf{H} \mathbf{e} + 2(\mathbf{D}\mathbf{w})^\top \mathbf{P} \mathbf{e}. \quad (7.12)$$

Uslov $\dot{V} \leq 0$ zadovoljen je za svaku grešku estimacije koja zadovoljava uslov

$$\|\mathbf{e}\| > 2 \frac{\Delta \|\mathbf{D}^\top \mathbf{P}\|}{\|\mathbf{H}\|}. \quad (7.13)$$

Ova posljednja nejednačina implicira da predloženi Luenbergerov opserver može osigurati samo konvergenciju greške estimacije ka ograničenom području oko koordinatnog početka. Kao posljedica toga, standardni Luenbergerov opserver ne može se primijeniti za rekonstrukciju stanja kod sistema na koje djeluje poremećaj.

Opserver na bazi KR, koji kod estimacije stanja koristi prekidnu funkciju, predstavlja potencijalno rješenje ovog problema. Takođe, važno je naglasiti da primjenom opservera na bazi KR moguće je dobiti estimiranu vrijednost nepoznatog vanjskog poremećaja što se može iskoristiti u složenim sistemima upravljanja sa ciljem postizanja bolje robusnosti.

Primjer 7.1

Kao primjer posmatra se dinamički sistem drugog reda opisan jednačinama

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = a x_2(t) + b u(t) + w(t),$$

gdje su $a = -0.25$ i $b = 0.25$, dok $w(t)$ predstavlja vanjski poremećaj koji djeluje na ulaz objekta i definisan je kao

$$w(t) = -0.5 h(t - 40) - 0.5 h(t - 55) \sin(0.2\pi t).$$

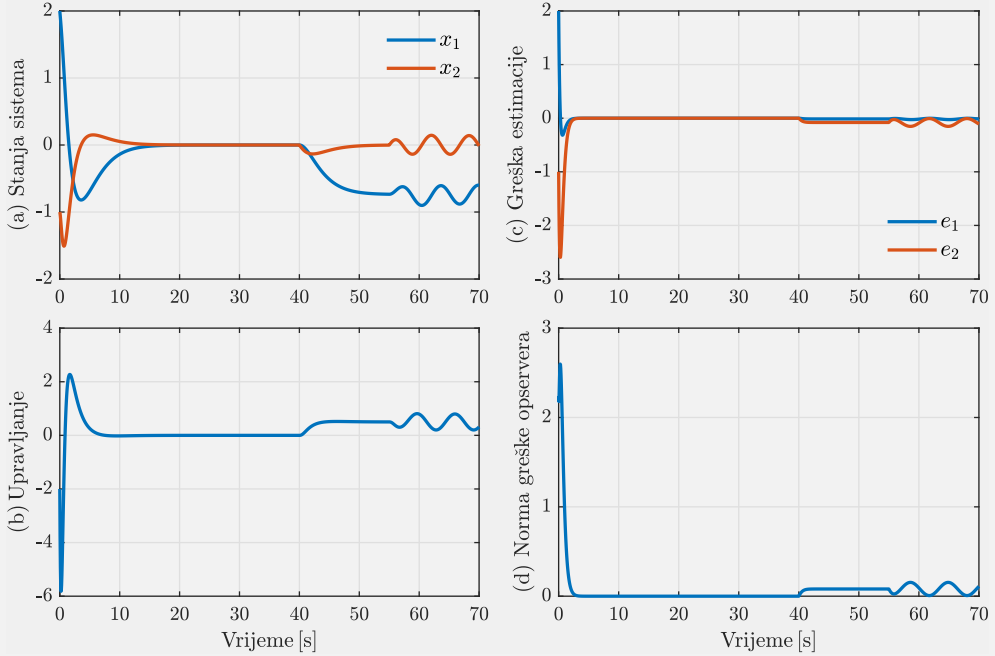
Kao izlaz sistema uzima se $y(t) = x_1(t)$. Cilj je stabilizacija sistema na osnovu izlaza $y(t)$ i analiza uticaja poremećaja $w(t)$ primjenom dva zakona upravljanja: linearno upravljanje po stanjima i upravljanje u KR. Za oba zakona upravljanja, potrebno su sva stanja sistema. Za dati primjer, stanje $x_1(t)$ je dostupno, dok stanje $x_2(t)$ nije i biće potrebno uraditi njegovu estimaciju korištenjem Lunebergerovog opservera.

Luenbergerov opserver. Jednačina za lunbergerov opserver je data sa (7.3). Parametri opservera l_1 i l_2 se biraju tako da polovi matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ budu -3 . Za dati sistem dobija se matrica $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5, 75 & 7, 5625 \end{bmatrix}^\top$.

Linearno upravljanje po stanju. U prvom scenariju razmatra se linearni zakon upravljanja po stanju $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, gdje je $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ matrica pojačanja povratne sprege po stanju. Parametri se određuju metodom podešavanja polova tako da polovi matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ budu -0.5 . Ovakav izbor polova rezultovat će umjerenim upravljačkim signalom i sporijom, ali glatkom, dinamikom zatvorene petlje. Za dati sistem dobija se $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Na slici 7.1 prikazani su odzivi razmatranog sistema. Uočava se da stanja sistema konvergiraju ka ravnotežnoj tački uz umjerenu dinamiku, ali nakon

pojave poremećaja javlja se odstupanje od ravnotežnog stanja. Iz signala greški estimacije se vidi da one brzo opadaju i konvergiraju ka nuli, ali nakon pojave poremećaja dolazi do povećanja greške po stanju x_2 . Upravljački signal je kontinualan bez saturacije uz povećanje amplitude u prisustvu poremećaja.



Slika 7.1. Signali stanja sistema, upravljanja, greški opservera i norme greške opservera

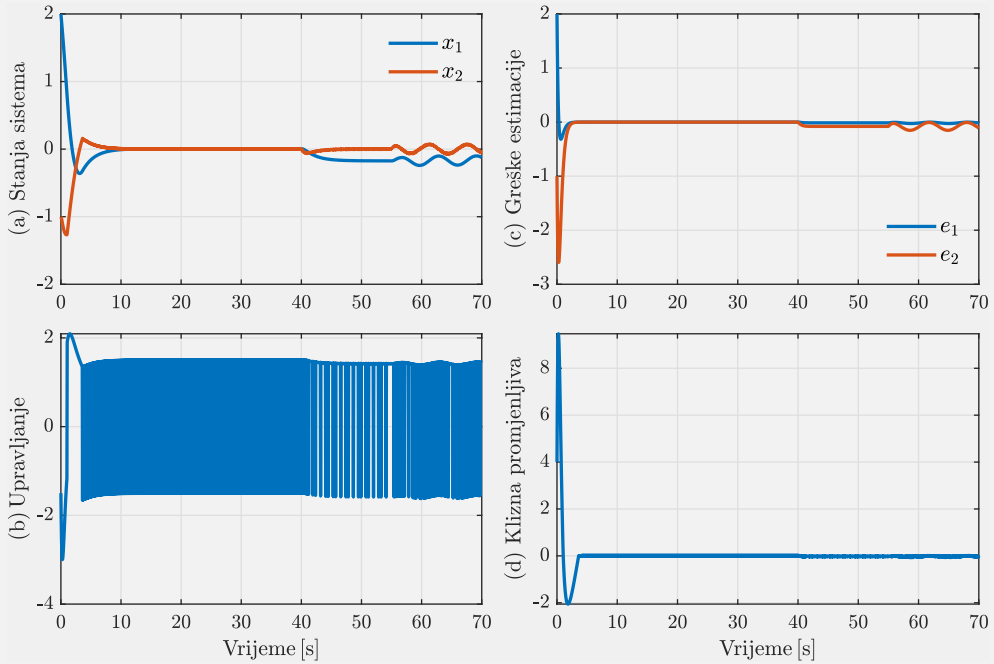
Iako je ponašanje sistema stabilno, predloženi sistem se ne može izboriti s vanjskim poremećajem što je nedostatak Luenbergerovog opservera.

Upravljanje u KR. U drugom scenariju razmatra se zakon upravljanja u KR definisan relacijama (4.34) i (4.44). Klizna linija se definiše koristeći jednačinu (4.40) i prethodno dobijenu matricu $\mathbf{K}$. U skladu s pomenutim relacijama, matrica $\mathbf{c}$ za izračunato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ se dobija $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Upravljački zakon u KR formira se kao kombinacija linearne povratne veze i nelinearnog robusnog člana $u(t) = -\mathbf{c}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \alpha \text{sign}(g(t))$, gdje je $\alpha = 1,5$ a klizna linija je definisana kao $g(t) = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t)$.

U odnosu na linearno upravljanje, KR obezbeđuje znatno bolju robusnost i efikasniju kompenzaciju poremećaja (slika 7.2). Nelinearni član upravljanja obezbeđuje robusnost u odnosu na nepoznati poremećaj $w(t)$ i doprinosi

smanjenju njegovog uticaja tako da stanja sistema ostaju bliže ravnotežnom stanju.



Slika 7.2. Signali stanja sistema, upravljanja, greški opservera i klizne promjenljive

U oba razmatrana slučaja projektovanja upravljanja, glavni izvor odstupanja nije bio regulator već ograničenja Luenbergerovog opservera. Ovo se zaključuje iz norme greške opservera koja je ostala ista u oba slučaja.

7.2. Utčinov opserver na bazi KR

U ovom dijelu će biti objašnjen opserver na bazi KR definisan u [116]. Glavna ideja je pokazati da opserver može prisiliti grešku po izlazu da konvergira na nulu u konačnom vremenu dok stanja opservera asimptotski konvergiraju ka stanjima sistema. Osim toga, biće pokazano da je moguće estimirati i stanja sistema i poremećaje koji djeluju na sistem.

Posmatrajmo sistem definisan jednačinama (7.7) i (7.2). S obzirom na to da će izlazi biti posmatrani, logično je izvršiti promjenu koordinata tako da se izlazi pojave kao komponente vektora stanja.

Neka postoji transformacija koordinata $\mathbf{x}_t = \mathbf{T}_c \mathbf{x}$ povezana s invertibilnom matricom $\mathbf{T}_c$ ($\det \{\mathbf{T}_c\} \neq 0$) definisanom kao

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{N}_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}). \quad (7.14)$$

gdje kolone matrice $\mathbf{N}_c$ čine bazu nul-prostora matrice $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}\mathbf{N}_c = \mathbf{0}_{m \times (n-p)}$).

Primjenom ove transformacije koordinata, matrice sistema (7.7) poprimaju sljedeću formu:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \mathbf{T}_c \mathbf{A} \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_t = \mathbf{T}_c \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_t &= \mathbf{T}_c \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_t = \mathbf{C} \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

gdje vrijedi $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m}$ i $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times q}$.

Sistem (7.7) nakon primjene transformacije (7.14) postaje:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_t(t) &= \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t(t) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_t \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t(t). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Za sistem (7.16) na koji ne djeluje poremećaj ($\mathbf{w}(t) \equiv \mathbf{0}$), prof. V. Utkin je predložio opserver sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_t(t) &= \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_t(t) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_n \mathbf{v}(t), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{x}}_t(t), \end{aligned} \quad (7.17)$$

pri čemu je $\mathbf{v}(t)$ vektor prekidnih funkcija čije komponente su definisane sa

$$v_i(t) = \rho \operatorname{sign}(e_{y,i}(t)), \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (7.18)$$

gdje je $\rho \in \mathbb{R}^+$ konstanta, a $e_{y,i}$ predstavljaju komponente greške po izlazu definisane kao $\mathbf{e}_y(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$.

U ovom slučaju, dinamika greške opservera po stanju $\mathbf{e}_t(t) = \mathbf{x}_t(t) - \hat{\mathbf{x}}_t(t)$ se može dobiti kao

$$\dot{\mathbf{e}}_t(t) = \mathbf{A}_t \mathbf{e}_t(t) + \mathbf{G}_n \mathbf{v}(t), \quad (7.19)$$

pri čemu matrica pojačanja opservera $\mathbf{G}_n$ ima formu

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ -\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

gdje je $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ nepoznata matrica pojačanja koju je potrebno odrediti.

Primjenom (7.15) pod uslovom da jednačina (7.19) se može napisati u formi:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{e}_y(t) + \mathbf{L}\mathbf{v}, \quad (7.21)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_y(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{e}_y(t) - \mathbf{v}, \quad (7.22)$$

pri čemu vrijedi $\mathbf{e}_t = [\mathbf{e} \quad \mathbf{e}_y]^\top$.

Nadalje, jednačina (7.22) se može zapisati po komponentama kao

$$\dot{e}_{y,i}(t) = \mathbf{A}_{21,i} \mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{22,i} \mathbf{e}_y(t) - \rho \operatorname{sign}(e_{y,i}(t)), \quad (7.23)$$

gdje $\mathbf{A}_{21,i}$ i $\mathbf{A}_{22,i}$ predstavljaju i -te redove matrica $\mathbf{A}_{21}$ i $\mathbf{A}_{22}$, redom.

Da bi se dobili uslovi pod kojima će se ostvariti kretanje u KR, ispitat će se uslov dosezanja KR na kliznoj površi definisanoj s $\mathbf{e}_y = \mathbf{0}$. Iz (7.23) slijedi

$$\begin{aligned} e_{y,i} \dot{e}_{y,i} &= e_{y,i} (\mathbf{A}_{21,i} \mathbf{e} + \mathbf{A}_{22,i} \mathbf{e}_y) - \rho |e_{y,i}| \\ &< -|e_{y,i}| (\rho - |\mathbf{A}_{21,i} \mathbf{e} + \mathbf{A}_{22,i} \mathbf{e}_y|). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Pod uslovom da je vrijednost konstante ρ odabrana dovoljno velika tako da vrijedi

$$\rho > |\mathbf{A}_{21,i} \mathbf{e} + \mathbf{A}_{22,i} \mathbf{e}_y| + \eta, \quad (7.25)$$

gdje je skalar $\eta \in \mathbb{R}_+$, tada

$$e_{y,i} \dot{e}_{y,i} < -\eta |e_{y,i}|. \quad (7.26)$$

Posljednji uslov implicira da će $e_{y,i}$ konvergirati ka nuli u konačnom vremenu nakon čega će se kretanje u KR nastaviti duž klizne linije definisane s $e_{y,i} = \dot{e}_{y,i} = 0$.

Kada svaka komponenta vektora $\mathbf{e}_y(t)$ konvergira ka nuli, to znači da će estimirani izlaz opservera pratiti mjerene izlaze polaznog sistema.

Tokom kretanja u KR vrijedi $\mathbf{e}_y(t) = \dot{\mathbf{e}}_y(t) = \mathbf{0}$, a sistem greške definisan jednačinama (7.21) i (7.22) se može zapisati u reduciranom obliku kao:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{e}(t) + \mathbf{L}\mathbf{v}_{eq}, \quad (7.27)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}(t) - \mathbf{v}_{eq}, \quad (7.28)$$

gdje $\mathbf{v}_{eq}$ predstavlja ekvivalentnu (po analogiji na ekvivalentno upravljanje) kompenzacionu komponentu greške po izlazu potrebnu da bi se održalo kretanje u KR. Uvrštavanjem izraza za $\mathbf{v}_{eq}$ dobijenog iz (7.28) u izraz (7.27) dobija se

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\mathbf{e}(t). \quad (7.29)$$

Posljednja jednačina opisuje kretanje u KR sistema reduciranog $n - p$ reda i slična je jednačini (7.6). Po istom principu kretanje opisano jednačinom (7.29) je stabilno, ako je matrica $\mathbf{L}$ pravilno odabrana. Može se pokazati da ako je par $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ polaznog sistema opservabilan, tada je i par $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21})$ takođe opservabilan. Iz te činjenice slijedi da se matrica $\mathbf{L}$ uvijek može odabrati da obezbijedi stabilnost kretanja iz jednačine (7.29).

Primjer 7.2

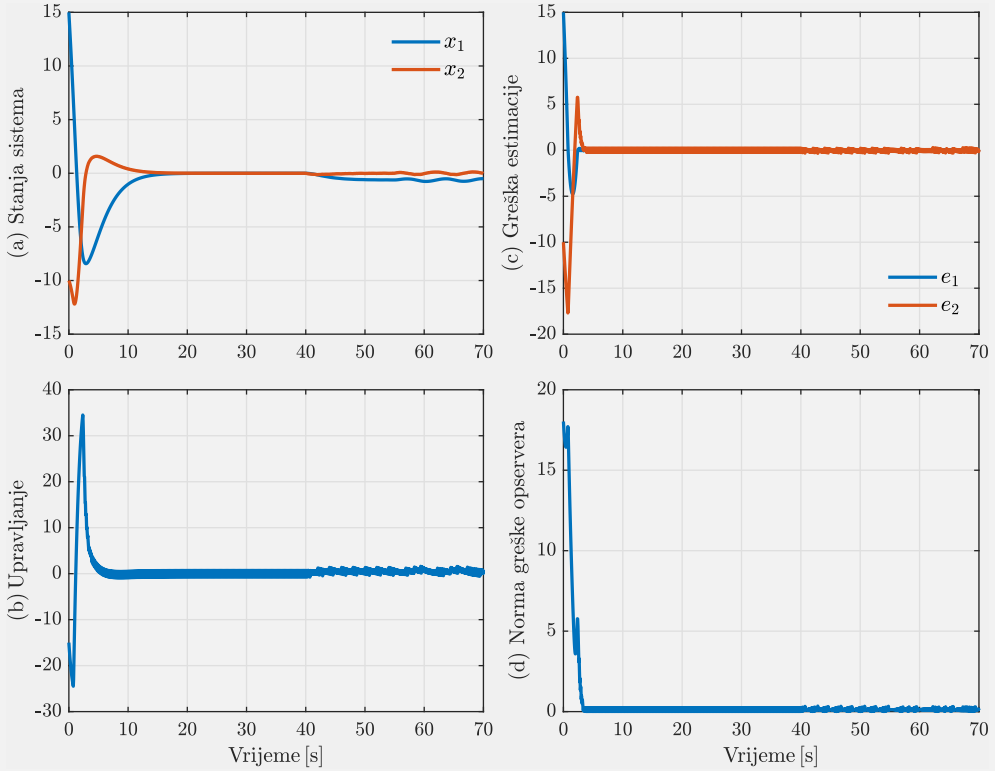
U ovom primjeru će se razmatrati isti sistem kao u primjeru 7.1. Za estimaciju nepoznatog stanja biće korišten Utkinov opserver opisan jednačinama (7.17) i (7.18). Kod projektovanja opservera korištene su sljedeće matrice:

$$\mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} 2, 75 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdje je matrica odabrana pod uslovom da polovi matrice $(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})$ budu -3 .

Na slikama 7.3 i 7.4 su prikazani odzivi sistema kada se za estimaciju stanja koristi Utkinov opserver uz poređenje dva zakona upravljanja: linearno upravljanje po stanju i upravljanje u KR. U odnosu na slučaj s Luenbergerovim opserverom, primjetno je da greške estimacije znatno brže konvergiraju ka nuli i ostaju u okolini nule uprkos djelovanju poremećaja, što potvrđuje efikasnost Utkinovog opservera u kompenzaciji nepoznatog poremećaja.

Signali odziva sistema za slučaj primjene linearnog regulatora su prikazani na slici 7.3 gdje su parametri regulatora isti kao i u prethodnom primjeru. Uprkos dobroj estimaciji stanja koristeću Utkinov opserver i dalje se uočava osjetljivost na poremećaj, budući da linearni regulatori u pravilu nisu sposobni da se u potpunosti izbore s nepoznatim i vremenski promjenljivim poremećajima.

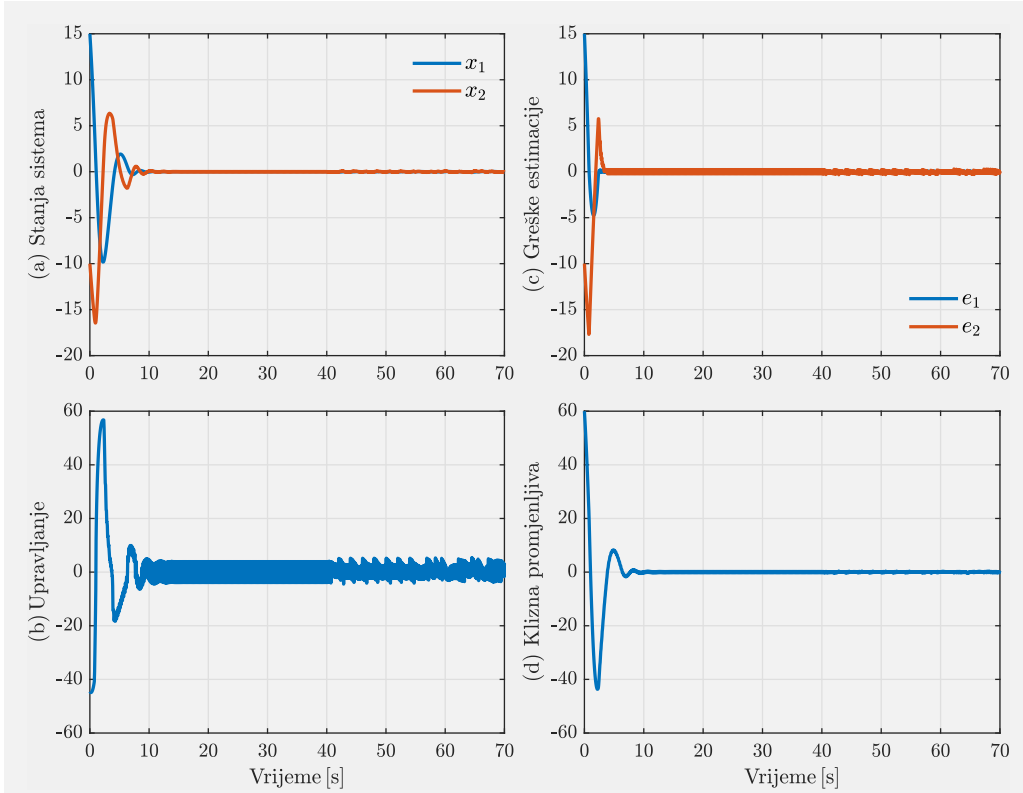


Slika 7.3. Signali stanja sistema, upravljanja, greški opservera i norme greške opservera

Na slici 7.4 su prikazani odzivi sistema za upravljanje na bazi KR koje je korišteno i u prethodnom primjeru.

U poređenju s linearnim regulatorom, upravljanje s KR omogućava znatno bolju kompenzaciju poremećaja i održavanje stanja sistema u blizini ravnotežnog stanja.

Cijena ove robusnosti ogleda se u pojavi izraženijeg upravljačkog signala i mogućem treperenju, koje se u praksi ublažava odgovarajućim izborom parametara i glatkih aproksimacija funkcije.



Slika 7.4. Signali stanja sistema, upravljanja, greški opservera i klizne promjenljive

7.3. Super-twisting observer

Neka se razmatra dinamički sistem sljedećeg oblika:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + \delta, \quad y = x_1, \quad (7.30)$$

gdje su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ stanja sistema, $y \in \mathbb{R}$ izlaz sistema, $u \in \mathbb{R}$ upravljanje, a δ nepoznati ograničeni poremećaj ($|\delta| \leq \Delta \in \mathbb{R}^+$).

Budući da je dostupna samo informacija o izlazu y , a za većinu upravljačkih algoritama zahtijeva se potpunu informaciju o stanjima sistema, onda je potrebno rekonstruisati druga stanja sistema i nepoznati poremećaj.

Jedno od rješenja ovakvog sistema je dato u naučnom radu [117] gdje su autori predložili *super-twisting* opserver - STO.

Dinamika STO za procjenu stanja sistema (7.30) data je sljedećim izrazima:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + z_1, \quad \dot{\hat{x}}_2 = u + z_2, \quad (7.31)$$

gdje su $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ procijenjena stanja sistema, a z_1 i z_2 korekcionni članovi opservera.

Ako su greške stanja opservera definisane kao:

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_2. \quad (7.32)$$

a korekcionni članovi odabrani u obliku:

$$z_1 = l_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1), \quad z_2 = l_2 \text{sign}(e_1). \quad (7.33)$$

onda se dinamika greški stanja opservera e_1 i e_2 može se zapisati u obliku

$$\dot{e}_1 = -l_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) + e_2, \quad (7.34)$$

$$\dot{e}_2 = -l_2 \text{sign}(e_1) + \delta. \quad (7.35)$$

Na osnovu dokaza datog u odjeljku 6.1.2, moguće je odrediti opseg parametara l_1 i l_2 za koje će sistem jednačina (7.34) i (7.35) biti stabilan u konačnom vremenu.

Konkretno, ako se izaberu pojačanja $l_1 = 1.5\sqrt{\Delta}$ i $l_2 = 1.1\Delta$, onda greške stanja opservera e_1 i e_2 istovremeno će konvergirati ka nuli u konačnom vremenu. Nakon toga vrijedi

$$x_1 = \hat{x}_1, \quad x_2 = \hat{x}_2. \quad (7.36)$$

Primjer 7.3

Koristeći relacije (7.30)-(7.36), STO za sistem iz primjera 7.1 moguće je zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - l_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u - l_2 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \end{aligned}$$

gdje su za parametre opservera uzete vrijednosti $l_1 = 6$ i $l_2 = 11$.

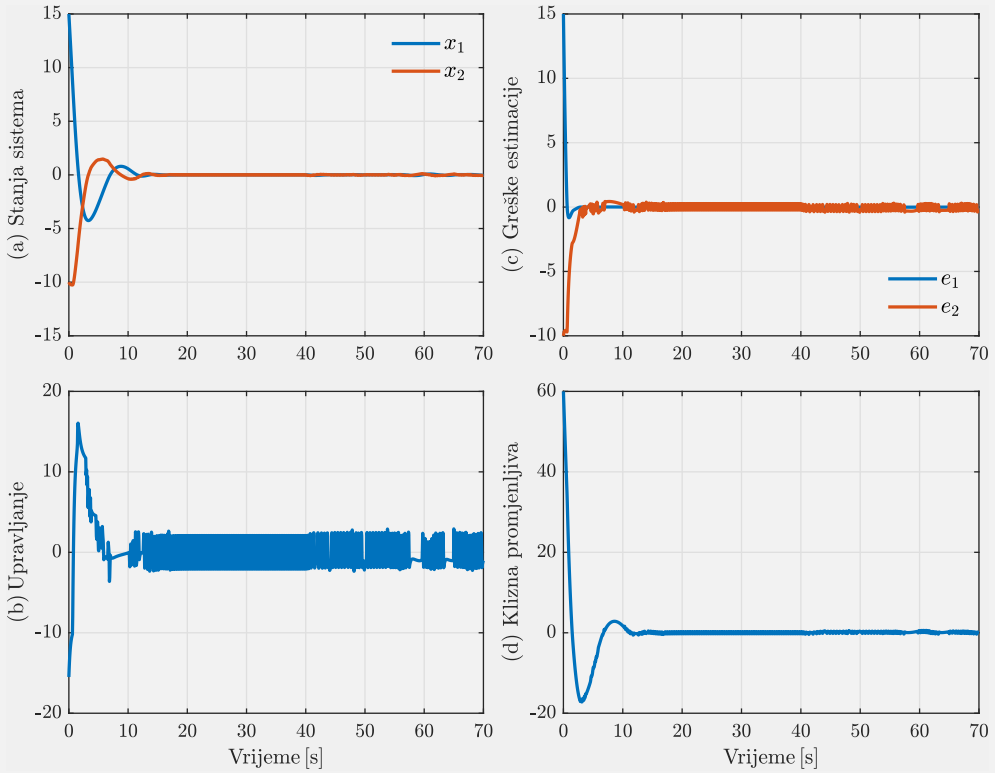
U ovom primjeru, za upravljanje će biti korišten STA regulator koji je na osnovu (6.23) i (6.24) opisan jednačinama:

$$u = -c_1 \hat{x}_2 - k_1 |g|^{1/2} \text{sign}(g) + v,$$

$$\dot{v} = -k_2 \text{sign}(g),$$

$$g = c_1 x_1 + \hat{x}_2,$$

gdje su za parametre regulatora uzete vrijednosti $c_1 = 4$, $k_1 = 2$ i $k_2 = 1$.



Slika 7.5. Signali stanja sistema, upravljanja, greški opservera i klizne promjenljive

Na slici 7.5 su prikazani odzivi sistema dobijeni primjenom STO i STA regulatora. Stanja sistema brzo konvergiraju ka ravnotežnom stanju uz ograničene oscilacije u tranzijentnom režimu, dok se nakon kratkog vremena stabilizuju oko nule. Greške estimacije opservera opadaju u konačnom vremenu i ostaju u okolini nule uz prisustvo poremećaja, što potvrđuje efikasnost STO u odnosu na linearne estimatore.

Klizna promjenljiva dostiže nulu nakon faze dosezanja i zadržava se u njenoj blizini, čime se uspostavlja KR. Iako upravljački signal pokazuje izraženije tranzijentne vrijednosti i određeni nivo oscilovanja, on ostaje ograničen, što predstavlja prihvatljiv kompromis između robusnosti i praktične implementacije.

7.4. Linearni aktivni eliminator poremećaja

U ovom odjeljku biće riječi o linearnom aktivnom eliminatoru poremećaja (eng. *Linear Active Disturbance Rejection* - LADR), koji za model objekta uzima rednu vezu onoliko integratora koliki je red sistema. Ukupan poremećaj u sistemu je nemodelirana dinamika i parametarski poremećaji plus vanjski poremećaj kao dodatna koordinata stanja. Ovaj estimator/kompenzator naziva se aktivnim jer u svom djelovanju uključuje regulator upravljanja.

Najprije će biti izložen princip rada LADR-a za vremenski kontinualne sisteme sa skalarnim upravljanjem, s konvencionalnom povratnom spregom po stanju, prema [118], a zatim će taj pristup biti prilagođen i na SUPS s kretanjem u KR sa ciljem postizanja boljih osobina sistema u cjelini.

Dinamički model objekta n -tog reda sa skalarnim upravljanjem bez konačnih nula je

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) + w(t) + bu(t), \quad (7.37)$$

gdje $y^{(i)}$ označava i -ti izvod izlaznog signala objekta upravljanja. a_i i b su parametri objekta, a $w(t)$ je vanjski poremećaj. Namjerno je poremećaj $w(t)$ napisan ispred člana s upravljanjem. Po metodi LADR, prva dva člana na desnoj strani relacije (7.37) smatraju se generalisanim poremećajem $f(t)$, te model sistema poprima oblik

$$y^{(n)}(t) = bu(t) + f(t), \quad (7.38)$$

što predstavlja rednu vezu n integratora i pojačavača s pojačanjem b . Pojačanje b nije potrebno precizno poznavati, nego se odstupanje pojačanja δb ($b = b_o + \delta b$) i poremećaj $f(t)$ mogu objediniti u generalisani poremećaj čija je estimacija $\hat{f}(t)$. Tako da model (7.37) ostaje, samo umjesto b figuriše b_o .

U sistem se uvodi upravljanje definisano na sljedeći način

$$u = \frac{u_o - \hat{f}}{b_o}, \quad (7.39)$$

čime se vrši normalizacija.

Član $\frac{\hat{f}}{b_o}$ treba da kompenzuje generalisani poremećaj $f(t)$. Tada, zamjenjujući (7.39) u (7.38), konačno dobijamo normalizovan sistem

$$y^{(n)} \approx u_o, \quad (7.40)$$

kao rednu vezu n čistih integratora.

Jedan od načina upravljanja datim objektom je da se uvede proporcionalno pojačanje po signalu greške sistema i proporcionalno pojačanje u povratnoj sprezi s izlaza integratora. Te povratne sprege su diferencijalnog tipa u odnosu na izlaz, jer je model objekta kanonskog kontrolabilnog oblika. Mogu se primijeniti i drugi zakoni upravljanja pa i zakoni SUPS. Osnovno je da treba odrediti generalisani poremećaj f , odnosno njegovu zadovoljavajuću estimaciju $\hat{f}$.

U tu svrhu koristi se metoda zasnovana na proširenom opserveru stanja. S obzirom na to da je sistem n -tog reda, on ima n stanja, a $n + 1$ stanje je nepoznati poremećaj. Stoga se dinamika proširenog sistema opisuje relacijama:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{v}f, \quad (7.41)$$

$$y = \mathbf{q}\mathbf{x}, \quad (7.42)$$

gdje je

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n+1}]^\top, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [0 \ \dots \ b_o \ 0]^\top,$$

$$\mathbf{v} = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^\top, \quad \mathbf{q} = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Za prošireni dinamički sistem (7.41) konstruiše se Luenbergerov opserver stanja:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}), \quad (7.43)$$

$$\hat{y} = \mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}, \quad (7.44)$$

$$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{n+1}]^\top, \quad (7.45)$$

Poslije stepenovanja binoma i upoređivanja koeficijenata lijeve i desne strane polinoma dolazi se do relacije za izračunavanje koeficijenata

$$k_i = \frac{n!}{(n-i+1)!(i-1)!} \omega_s^{n-i+1} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.48)$$

Struktura sistema upravljanja data je na slici 7.6, gdje regulator ostvaruje upravljanje po formuli

$$u = \sum_{i=1}^n k_i \left(r^{(i-1)} - \hat{x}^{(i-1)} \right). \quad (7.49)$$

Naprijed je prikazan način projektovanja klasične linearne povratne sprege po stanju, uz pretpostavku da su željeni polovi sistema n -tog stepena. U SUPS s klasičnim KR (KR prvog reda), jedan pol je, po definiciji, $\lambda = 0$ a ostali polovi se postavljaju po želji u stabilnoj oblasti pa mogu biti i višestruki. Ovi polovi definišu dinamiku kretanja u KR, ali ne i pol $\lambda = 0$.

Relacija (7.48) može se primijeniti u tom slučaju s tim što će se vektor pojačanja povratne sprege koji definiše polove sistema u KR imati oblik $\mathbf{k} = [0 \ k_{sm}]$, gdje je $k_{sm} = [k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n]$ a elementi vektora k_{sm} se izračunavaju po formuli

$$k_i = \frac{(n-1)!}{(n-i+1)!(i-2)!} \omega_s^{n-i+1} \quad (i = 2, \dots, n). \quad (7.50)$$

Kada je poznat vektor povratne sprege, vektor $\mathbf{c}$ klizne promjenljive $g = \mathbf{c}\mathbf{x}$ određuje se po formuli [56]

$$\mathbf{c} = [\mathbf{k} \ 1] [\mathbf{A}_n \ \mathbf{b}_n]^\dagger, \quad (7.51)$$

pri čemu je $\mathbf{c}\mathbf{b}_n = 1$, $\mathbf{c}\mathbf{A}_n = \mathbf{k}$, a dinamika sistema je opisana relacijom

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{b}_n \mathbf{c}) \mathbf{A}_n \mathbf{x}. \quad (7.52)$$

Upravljanje se definiše na sljedeći način

$$u = -\mathbf{k}\mathbf{e} - \alpha \operatorname{sign}(g), \quad g = \mathbf{c}\mathbf{x}, \quad \alpha > 0. \quad (7.53)$$

Projektovanje proširenog opservera

Pošto opserver treba da bude brži od sistema upravljanja 3–10 puta, uvodi se koeficijent $k_o = 3 - 10$ kojim se definiše propusni opseg opservera u odnosu na propusni opseg sistema upravljanja

$$\omega_o = k_o \omega_s. \quad (7.54)$$

Koristeći istu metodologiju kao u (7.47), s tim što će red sistema biti $n + 1$ a umjesto ω_s figuriše ω_o , dolazi se do formule za izračunavanje elemenata vektora $\mathbf{l}$ opservera u obliku

$$(\lambda + \omega_o)^{n+1} = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{lq}) = \lambda^{n+1} + l_1 \lambda^n + \dots + l_{n-1} \lambda + l_{n+1}, \quad (7.55)$$

odakle slijedi

$$l_i = \frac{(n+1)!}{(n-i+1)!(i-1)!} \omega_o^i \quad (i = 1, \dots, n+1). \quad (7.56)$$

Ako se opserver projektuje u klasi SUPS s kretanjem u KR, tada se na sličan način kao kod projektovanja regulatora s KR (relacija (7.50)) dolazi do zaključka da je $\mathbf{l} = [\mathbf{l}_{sm} \ 0]$, $\mathbf{l}_{sm} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$, a elementi vektora $\mathbf{l}_{sm}$ određuju se po formuli

$$l_i = \frac{n!}{(n-i)!i!} \omega_o^i, \quad l_{n+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.57)$$

Upoređujući date vektore $\mathbf{k}$ i $\mathbf{l}$ vidi se da se razlikuju u redoslijedu elemenata. Prvi element $\mathbf{k}$ postaje zadnji element $\mathbf{l}$, zadnji element $\mathbf{k}$ postaje prvi element $\mathbf{l}$, i tako redom.

U najprostijem slučaju, KR u opserveru može se organizovati tako da se umjesto koeficijenta k_{n+1} primijeni funkcija $k_{n+1} = \alpha \text{sign}(y - \hat{y})$.

Primjer 7.4

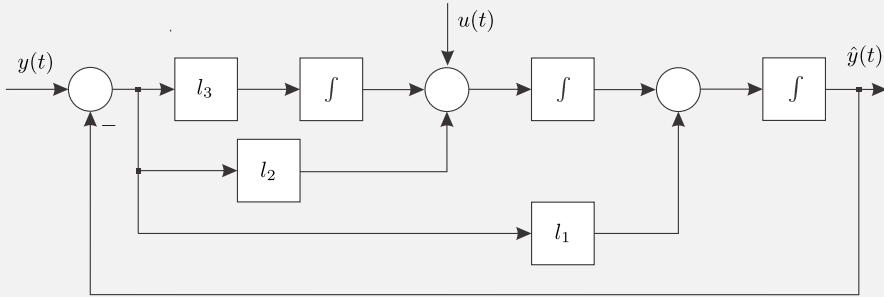
Na primjeru dinamičkog sistema iz primjera 7.1 biće razmatran prezentirani LADR metod estimacije poremećaja. Neka je usvojeno $\omega_s = 5 \text{ s}^{-1}$ i $k_o = 3$. Tada su prema (7.57), elementi vektora $\mathbf{l}$ proširenog opservera $l_1 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $l_2 = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ i $l_3 = 3^3 \cdot 5^3$.

Ulazni referentni signal r je jedinična odskočna funkcija, a ulazni prilagodni element M na slici 7.6 opisan je relacijom $\dot{r}_m = r - r_m$. Regulator će biti projektovan: (i) na konvencionalni način s dvostrukim polom $\lambda_{1,2} = -\omega_s$ i (ii) na bazi KR s polovima $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -\omega_s$.

Na osnovu poznatih podataka, **algoritam klasičnog upravljanja** dat relacijom (7.49) je definisan kao $u = -25(r_m - \hat{y}) - 10(\dot{r}_m - \dot{\hat{y}}) + \dot{r}_m$.

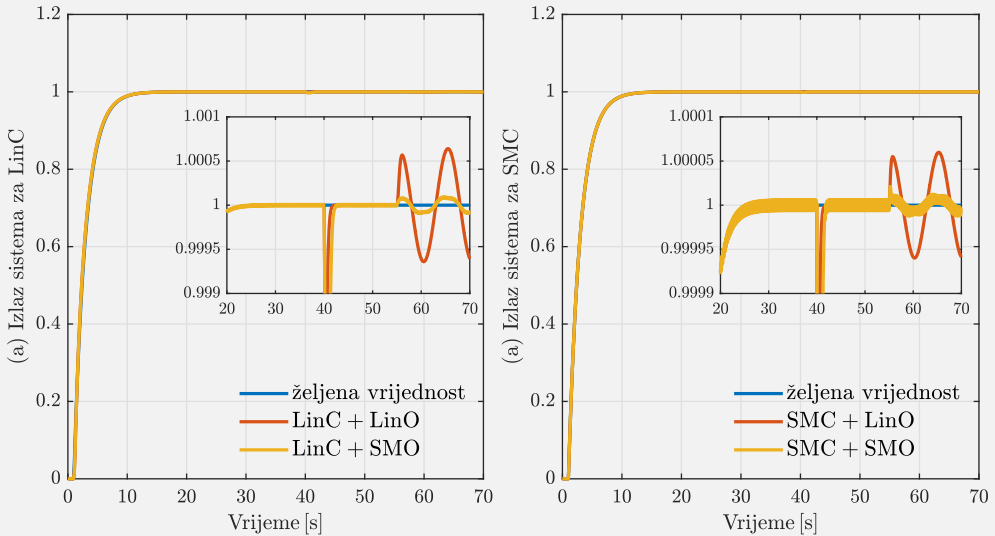
Koristeći (7.53), **algoritam na bazi KR** može biti definisan $u = u_{eq} - \epsilon g - \alpha \text{sign}(g)$, gdje su $\mathbf{k}_{eq} = [0 \ 5]$, $\mathbf{c} = [5 \ 1]$, $\epsilon = 0.1$ i $\alpha = 0.1$. Član ϵg ubrzava dosezanje klizanja, a umjesto funkcije $\text{sign}(g)$ korištena je aproksimacija $\frac{g}{|g|+\delta}$ gdje je $\delta = 0.001$.

Na slici 7.7 prikazan je simulacioni model proširenog opserversa.



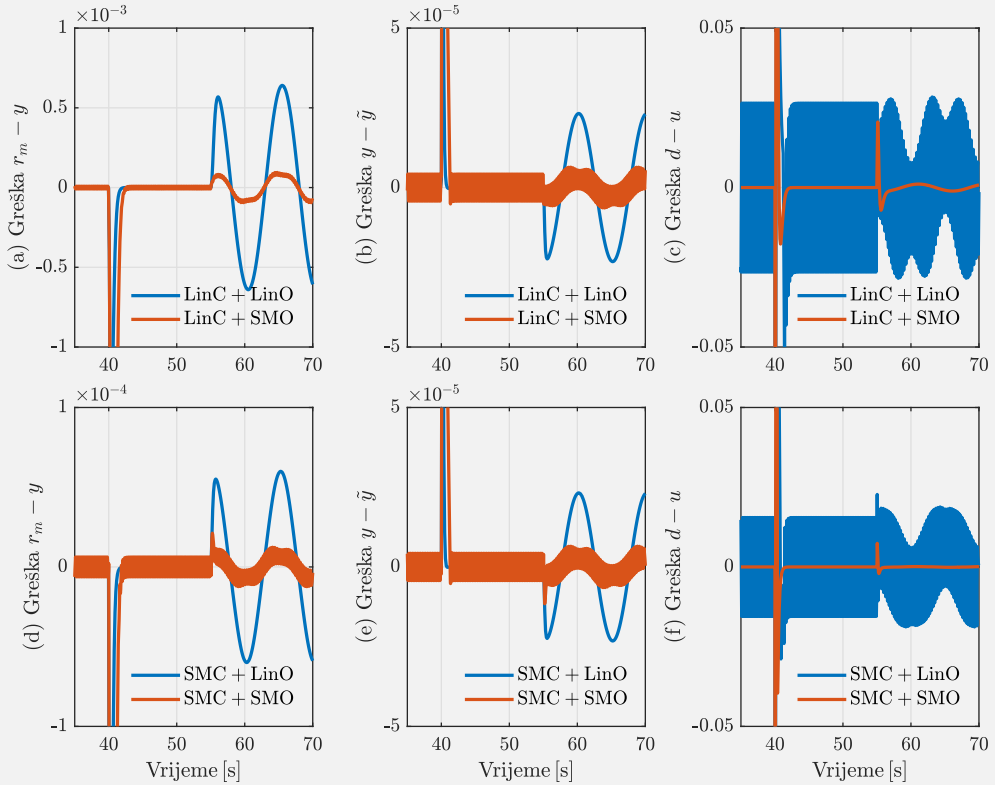
Slika 7.7. Simulacioni dijagram proširenog opserversa stanja

Rezultati simulacije prethodno opisanih sistema dati su na slikama 7.8 i 7.9.



Slika 7.8. Odziv sistema za različite tipove regulatora i opserversa

Slika 7.8 prikazuje željenu vrijednost izlaza, te odzive za različite kombinacije regulatora (linearni regulator (*LinC*) i regulator na bazi KR (*SMC*)) i opservera (linearni opserver (*LinO*) i opserver na bazi KR (*SMO*)). Na svim slikama su prikazani detalji koji pokazuju visok kvalitet regulacionih sistema s prednošću na strani primjene KR kako na opserveru, tako i u regulatoru sistema.



Slika 7.9. Signali greški sistema za različite tipove regulatora i opservera

Detaljni prikaz kvaliteta primjene KR je dat na slici 7.9 gdje su dati signali greške izlaza $r_m - y$, greške opservera $y - \hat{y}$ i greške u estimaciji smetnje $d - u$ ponovo za različite kombinacije regulatora i opservera. I na ovoj slici se primjećuje prednost primjene KR kako na opserveru, tako i u regulatoru sistema.

★ ★ ★ ★ ★

Dio III

Diskretni klizni režimi u SUPS

Ovaj dio je posvećen projektovanju upravljanja zasnovog na kliznim režimima u vremenski diskretnom domenu. Najprije se daje formulacija problema i uvode pojmovi kliznog i kvazi KR, zatim uslovi stabilnosti i privlačnosti u vremenski diskretnom domenu, te sistematizovan prikaz metoda projektovanja i detaljna analiza algoritama dosezanja. Poseban dio je posvećen metodama estimacije poremećaja, koje omogućavaju efikasniju kompenzaciju smetnji u vremenski diskretnom domenu. Na kraju se obrađuju diskretni klizni režim u linearnim sistemima s vektorskim upravljanjem, uključujući realizaciju upravljanja s konačnim vremenom smirivanja, te robusno upravljanje proizvoljnog reda.

8. Projektovanje regulatora zasnovanog na diskretnom KR

Jednostavnost implementacije algoritama upravljanja primjenom digitalnih hardverskih struktura omogućila je da postanu sastavni dijelovi sistema upravljanja kod kontinualnih sistema. U cilju obrade signala koji su po prirodi analogni, potrebno ih je pretvoriti u digitalni oblik koristeći A/D konvertore.

Idealni konvertori se ne mogu realizirati u praksi, pa se pretvaranje analognih signala u digitalne obavlja dvostrukom diskretizacijom: diskretizacijom po vremenu i diskretizacijom po amplitudi (kvantizacija po nivou). Udomaćeni termin za ovako dobijene signale je diskretni signali, a proces pretvaranja analognih signala u diskretne je diskretizacija odnosno uzorkovanje.

Za realizaciju sistema upravljanja potrebno je koristiti jednačine koje opisuju model sistema. Pošto se radi o digitalnom sistemu upravljanja potrebno je koristiti model u diskretnoj formi. Više metoda transformacije jednačina modela iz kontinualnog domena u diskretni domen je poznato [119]. Najčešće korišteni metod je primjenom kola zadržke nultog reda (eng. *Zero Order Hold* - ZOH).

Diskretni KR su nastali kao posljedica analize uticaja vremena uzorkovanja na kontinualne KR. Uzorkovanjem mjerenih signala u sistemu ima kao posljedicu da se vrijednost upravljanja računa na početku svakog perioda uzorkovanja i ostaje konstantna tokom cijelog perioda. Ovo će uzrokovati da upravljanje neće moći osigurati kretanje sistema po kliznoj površi nego u nekoj njenoj ograničenoj okolini (graničnom sloju), tako da će nastati kvazi KR slično kao i kod kontinualnih realnih KR.

U praksi se susreću dva postupka projektovanja sistema upravljanja zasnovanih na diskretnim KR:

- projektovanje sistema upravljanja primjenom kontinualnog KR, a potom dobijene jednačine prevesti u diskretni vremenski domen primjenom metoda diskretizacije,
- projektovanje sistema upravljanja direktnom primjenom diskretnih KR.

Postupak projektovanja sistema upravljanja direktnom primjenom diskretnih KR može se zasnivati na kanonskom kontrolabilnom modelu objekta upravljanja [32], na opštem modelu u prostoru stanja [56] ili na modelu ulaz-izlaz [120]. U svakom slučaju, za kvalitetno upravljanje potrebno je imati potpunu informaciju o upravljanoj objektu. Dalja izlaganja biće zasnovana na drugom prilazu, pretpostavljajući da je dat model objekta u prostoru stanja i da su sve koordinate stanja objekta upravljanja dostupne.

U odnosu na kontinulane KR, kod diskretnih KR nije potrebna prekidna priroda upravljanja da bi se dostigla klizna površ, jer će komponente ekvivalentnog upravljanja trajektoriju sistema dovesti na kliznu površ iz bilo kojeg početnog uslova. Kod sistema s izraženim uticajem poremećaja za računanje komponenti ekvivalentnog upravljanja neophodna je tačna vrijednost poremećaja. U praksi je teško dobiti tačnu vrijednost poremećaja, i to će za posljedicu imati kretanje sistema u KR unutar graničnog sloja klizne površi. Širina graničnog sloja će ovisiti o tome s kojom tačnošću je aproksimiran poremećaj. Uobičajen način smanjenja ove širine je primjena estimatora poremećaja u strukturi sistema upravljanja.

8.1. Formulacija problema

U ovom odjeljku posmatra se sistem upravljanja s povratnom spregom, s vremenski kontinualnim objektima upravljanja, definisanim sljedećim modelom u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \quad (8.1)$$

gdje je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja objekta, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor ulaznih signala u objekat kojima se vrši upravljanje objektom, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^\ell$ vanjski poremećaj (opterećenje) koje djeluje na objekat i remeti željeno stanje objekta. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$ su matrice odgovarajućih dimenzija, pri čemu par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ je potpuno kontrolabilan.

Elementi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{D}$ su poznati, a poremećaj $\mathbf{v}(t)$ je ograničen s obje strane i ima konačne izvode. Varijacije parametara $\Delta\mathbf{A}(t)$ i $\Delta\mathbf{B}(t)$ te vanjski poremećaj su kompatibilni s upravljanjem, tj. ispunjavaju uslove inavrijantnosti [5, 40], tj. $\text{rang}\{[\mathbf{B} \ \Delta\mathbf{A} \ \mathbf{D} \ \Delta\mathbf{B}]\} = \text{rang}\{\mathbf{B}\}$. Objekat (8.1) je minimalno-fazan (svi polovi i sve nule prenosne funkcije objekta su smještene u stabilnom području).

U prethodnim izlaganjima je rečeno da tehnika upravljanja na principu KR se sastoji iz dvije faze. U prvoj fazi, određuje se m površi $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, ..., $g_m(\mathbf{x})$, za koje vrijedi $g_i = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) = 0\}$ ($i = 1, \dots, m$), tako da svaka prolazi kroz nulto stanje ravnoteže $\mathbf{x} = 0$, a njihov presjek $g_E(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) \cap g_2(\mathbf{x}) \cap \dots \cap g_m(\mathbf{x})$ je površ $n - m$ dimenzionalnog prostora stanja sistema

$$g_E = \{\mathbf{x} \mid g_E(\mathbf{x}) = 0\}, \quad g_E \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

koja definiše željenu dinamiku kretanja objekta (8.1).

U drugoj fazi, potrebno je odrediti elemente prekidnog vektora upravljanja označenog s $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t), \dots, u_m(t)]$ gdje vrijedi

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i+}(t), & g_i(\mathbf{x}) > 0, \\ u_{i-}(t), & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \end{cases} \quad u_{i+} \neq u_{i-} \ (i = 1, \dots, m), \quad (8.2)$$

gdje su u_i^+ i u_i^- vremenski kontinualne funkcije, koje treba da obezbijede:

- (a) dosezanje površi g_E u konačnom vremenu, iz bilo kog polaznog stanja $\mathbf{x}(0)$,
- (b) egzistenciju KR na površi g_E .

Digitalna realizacija opisanog algoritma upravljanja može se ostvariti primjenom potpune ili parcijalne primjene diskretne obrade signala i to:

1. Diskretizacija se ostvaruje samo u procesu komutacije struktura sistema, tj. $g_i(\mathbf{x}(kT))$, $k \in \mathbb{N}^+$, T je period uzorkovanja, dok je upravljanje (8.2) vremenski kontinualno, $u_i = u_i(t)$.
2. Proces diskretizacije se vrši samo u kanalu upravljanja, $u_i = u_i(kT)$, dok $g_i = g_i(\mathbf{x}(t))$.
3. Kompletna diskretizacija:

- (i) različitim periodima uzorkovanja u svakoj strukturi sistema $u_{i+} = u_{i+}(kT_1)$, $u_{i-} = u_{i-}(kT_2)$ i u procesu komutacije struktura $g(kT_3)$,

- (ii) različitim periodom uzorkovanja u strukturama sistema $u_i(kT)$ i periodom uzorkovanja komutacije struktura $g(kT_1)$
- (iii) uniformnim periodom uzorkovanja u strukturama sistema $u_i(kT)$ i procesu komutacije struktura $g(kT)$, kad će upravljanje biti definisano kao

$$u_i(kT) = \begin{cases} u_{i+}(kT), & g_i(\mathbf{x}(kT)) > 0, \\ u_{i-}(kT), & g_i(\mathbf{x}(kT)) < 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Važno je naglasiti da se diskretno procesiranje signala ostvaruje obično primjenom digitalnog hardvera, uz primjenu D/A konvertora, A/D konvertora i kola zadržke nultog reda (eng. *Zero-Order-Hold* - ZOH) tako da upravljanja $u_{i+} = u_{i+}(kT_1)$, $u_{i-} = u_{i-}(kT_2)$, odnosno $u_{i+} = u_{i+}(kT)$, $u_{i-} = u_{i-}(kT)$ ostaju konstantna tokom perioda uzorkovanja $kT_i \leq t < (k+1)T_i$, uz prisustvo prekida prvog reda u trenucima uzorkovanja $t = kT_i$. Zbog toga se može smatrati da je upravljanje kontinualna funkcija.

Pošto digitalna obrada signala unosi transportno kašnjenje, sistemi tipa 1 su ekvivalentni sistemima s kontinualnom obradom informacija, kod kojih u procesu formiranja komutacijske strukture postoji transportno kašnjenje. Takvi sistemi su analizirani u [30, 31] i neće biti predmet razmatranja.

Kvazi KR ili idealni KR može biti ostvaren u sistemu tipa 2 [32], ali takvi sistemi nisu od velikog praktičnog značaja, kao i sistemi s različitim periodima uzorkovanja u strukturama sistema 3(i). Iako se u sistemima drugog reda može ostvariti konačno vrijeme dolaska u stanje ravnoteže [32], sistemi tipa 3(ii) neće biti predmet daljeg razmatranja.

Prema tome, naš prvenstveni interes biće posvećen sistemima s potpunom diskretnom obradom informacija i uniformnim periodima uzorkovanja u upravljanju i u komutacijskoj strukturi sistema. U tu svrhu, potrebno je transformisati matematički model objekta (8.1) u vremenski diskretni domen. Primjenom diskretizacije, dobija se sljedeći diskretni model

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT) + \mathbf{d}_d(kT), \quad (8.4)$$

gdje su

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{d}_d = \mathbf{d}_v + \mathbf{d}_A + \mathbf{d}_B + \mathbf{u}(kT), \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_v &= \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{D} \mathbf{v}((k+1)T - \tau) d\tau, \\ \mathbf{d}_A &= \int_0^T e^{A\tau} \Delta \mathbf{A}((k+1)T - \tau) \mathbf{x}((k+1)T - \tau) d\tau, \\ \mathbf{d}_B &= \int_0^T e^{A\tau} \Delta \mathbf{B}((k+1)T) d\tau.\end{aligned}$$

Ako je par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrolabilan, tada će i par $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d)$ biti kontrolabilan za najveći broj odabranih perioda uzorkovanja T . U postupku diskretizacije, objekat (8.1) može za neke periode uzorkovanja postati neminimalno fazni. Ipak, nadalje će se smatrati da je frekvencija uzorkovanja izabrana tako da diskretni model sistema ostaje minimalno fazni.

Period uzorkovanja T obično treba da se bira što manji. Kada je T malo, svaka funkcija razložena u Tejlorov red po stepenima T može se aproksimirati zadržavajući sve članove reda do zaključno s T^2 .

U [47] pokazano je da diskretno upravljanje $u(kT)$ je diskontinualno ako je $\nabla u(kT) = \mathcal{O}(1)$, kontinualno za $\nabla u(kT) = \mathcal{O}(T)$, i glatko ako je $\nabla u(kT) = \mathcal{O}(T^2)$, gdje je ∇ operator razlike unazad (eng. *Backward Difference Operator*) definisan kao $\nabla u(kT) = u(kT) - u(kT - T)$.

Ako poremećaji u vremenski kontinualnom domenu ispunjavaju uslove invarijantnosti, to ne znači da će ih ispunjavati i u vremenski diskretnom domenu, jer se kolo zadržke ne primjenjuje za poremećaje, već oni djeluju kontinualno na objekat, dok se upravljanje objekta diskretizuje i nepromjenljivo je unutar perioda uzorkovanja $kT \leq t < (k+1)T$. Ipak, odgovarajuća greška je reda $\mathcal{O}(T^2)$, ako se koristi estimator poremećaja [48]. S tog stanovišta, potrebno je koristiti što manji period uzorkovanja, što nije problem kod modernog digitalnog hardvera imajući u vidu da su upravljani objekti u industriji uglavnom sa sporom dinamikom.

Zadatak upravljanja je da sistem nakon konačnog, što je moguće kraćeg, vremena, dovede stanje sistema $\mathbf{x}(t)$ iz bilo kojeg polaznog položaja $\mathbf{x}(0)$ u stanje $g_E(\mathbf{x}(kT)) = 0$ i drži ga u tom stanju ili u njegovoj okolini. Po pretpostavci, $g_E(\mathbf{x}(kT)) = 0$ predstavlja kliznu površ čija je dinamika stabilna i s tom dinamikom se identifikuje kretanje objekta, poslije kraćeg vremena dosezanja. Postoji klasa sistema upravljanja s nultim vremenom trajanja dosezanja $g_E(\mathbf{x}(kT)) = 0$. O toj klasi sistema s tzv. integralnim KR biće riječi naknadno.

Ako je klizna promjenljiva $g_E(\mathbf{x}(kT)) = 0$ linearna funkcija koordinata stanja sistema, dosezanje nultog stanja ravnoteže ostvaruje se asimptotski. Takođe, u savremenoj teoriji postoji i klasa sistema promjenljive strukture s KR u kojima se $e(kT) = 0$ ostvaruje u konačnom vremenu, umjesto asimptotski.

Ovdje se razmatra samo klasa sistema s asimptotskim dosezanjem stanja ravnoteže. Pri tome treba imati u vidu sisteme višeg reda, jer se u sistemu prvog reda $e(kT) = 0$ ostvaruje za konačno vrijeme, što se klizna površ identifikuje koordinatnim početkom, a do nje se po definiciji doseže u konačnom vremenu.

Zadatak upravljanja je da stanje sistema $\mathbf{x}(t)$ dostigne željenu referencu $\mathbf{r}(kT)$. U cilju ostvarivanja zadatka upravljanja, neka je uvedena povratna sprega po stanju sistema i formiran model sistema upravljanja u prostoru stanja greške upravljanog sistema, definisan na sljedeći način:

$$\mathbf{e}(kT) = \mathbf{x}(kT) - \mathbf{r}(kT), \quad (8.6)$$

$$\mathbf{e}((k+1)T) = \mathbf{A}_d \mathbf{e}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT) + \mathbf{d}_d(kT) + \mathbf{A}_d \mathbf{r}(kT) - \mathbf{r}(kT + T), \quad (8.7)$$

gdje je $\mathbf{r}(kT)$ željena vrijednost stanja objekta.

Vrlo često se analiziraju sistemi autonomni u odnosu na referentni signal (sistemi tipa regulatora) kod kojih vrijedi $\mathbf{r}(kT) = 0$. U tom slučaju, matematički model sistema upravljanja u prostoru greške sistema (8.7) se poklapa s modelom objekta upravljanja (8.4).

Prema tome, nadalje će se razmatrati zadatak upravljanja za dinamički sistem opisan matematičkim modelom

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{d}_d(k), \quad (8.8)$$

i kliznom promjenljivom

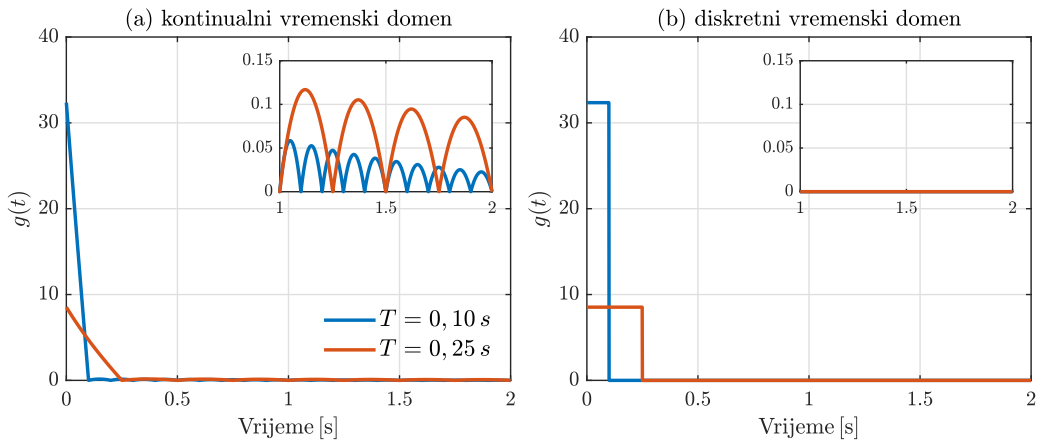
$$g_E(\mathbf{x}(k)) = 0. \quad (8.9)$$

U daljem tekstu će biti izostavljano T u notaciji kT ili $(k+1)T$, ili će umjesto $\star(kT)$ biti pisano $\star_k$.

Naći upravljanje $\mathbf{u}(k)$ koje će stanje sistema iz $\mathbf{x}(0)$ prevesti u stanje $g(\mathbf{x}(k)) = 0$, za konačan broj perioda uzorkovanja k^* ($0 < k^* < \infty$).

8.2. KR i kvazi-KR u diskretnim sistemima

U ovom odjeljku, data je definicija diskretnog KR i diskretnog kvazi KR za sisteme opisane modelom (8.8) i (8.9). Rigorozno posmatrajući, nije moguće ostvariti KR kao kod vremenski kontinualnih sistema već samo kvazi KR čak i u idealnom slučaju kada nema poremećaja koji djeluje na sistem. Zbog diskretnog upravljanja koje je konstantno unutar perioda uzorkovanja, a objekat koji je vremenski kontinualan ima konstantno upravljanje između trenutaka uzorkovanja, njegova trajektorija kretanja će odstupati od zadate trajektorije (8.9) (vidjeti sliku 8.1).



Slika 8.1. Klizna promjenljiva diskretnog sistema drugog reda u vremenski kontinualnom domenu i diskretnim trenucima uzorkovanja

Pod idealnim diskretnim KR podrazumijevamo takvo kretanje diskretnog sistema kada mu stanje u trenucima uzorkovanja ispunjava relaciju (8.9). Prema [50], kvazi KR je takvo kretanje diskretnog sistema upravljanja u kome kada trajektorija kretanja sistema prvi put presiječe površ g_E , nadalje će je uvijek presijecati u svakom narednom trenutku uzorkovanja i pri tome širina oblasti kretanja oko klizne površi se neće uvećavati.

Drugi autori imaju manje stroge zahtjeve u odnosu na kretanje u kvazi KR. Oni ne zahtijevaju obavezno presijecanje klizne promjenljive u svakom periodu uzorkovanja, već je važno da kretanje stanja sistema ostane u okolini klizne površi s unaprijed zadatim opsegom odstupanja.

U [53], kvazi-klizno kretanje stanja sistema u zadatoj ε -okolini klizne površi $g_E = 0$ je takvo kretanje sistema u kojem kada stanje uđe u ε -okolinu više je ne napušta, tako da vrijedi

$$\|g_E(k)\| \leq \varepsilon, \quad (8.10)$$

gdje je ε pozitivna konstanta koja definiše širinu zone kvazi KR.

U skladu s prethodnim, nije neophodno da trajektorija kretanja sistema obavezno presijeca kliznu površ, već je važno da ostane u zadatoj ε -okolini, a to znači da se može zadržati samo s jedne strane klizne promjenljive. Takvo kretanje je bez treperenja u upravljanju. Neki autori smatraju da takvo kretanje ne pripada KR, u smislu klasične definicije klizanja kod kontinualnih sistema, kada je neophodno da postoje sile koje su suprotnog znaka te djeluju s obje strane klizne površi.

Postoje još mnogi pristupi kod definisanja diskretnog KR. Ovdje vrijedi spomenuti definiciju iz [44] gdje diskretni KR predstavlja takvo kretanje da ako je $\mathbf{x}(k^*) \in g_E$, tada će

$$\mathbf{x}(k^* + j) \in g_E, \quad \forall j \in \mathbb{N}^+. \quad (8.11)$$

Ovako definisano kretanje određuje idealni diskretni KR koji je jedino moguć u nominalnom sistemu ($d(t) = 0$) ili u sistemu s konstantnim poremećajem i estimatorom poremećaja.

U svakom slučaju, nezavisno od definicije KR, trajektorije kretanja sistema, u periodima između trenutaka uzorkovanja, nalaze se u bliskoj okolini odnosno definisanoj oblasti klizanja u okolini $g_E = 0$. S tog stanovišta definicija opisana (8.10) obuhvata sve ostale definicije kako kvazi-kliznog tako i idealnog diskretnog KR.

8.3. Uslovi stabilnosti diskretnog KR

Za stabilnost diskretnog sistema upravljanja, opisanog modelom (8.8) i (8.9), pod uslovom da ima stabilan kvazi-KR, neophodno je dovesti stanje sistema u oblast klizanja iz bilo kojeg početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ i održavati stanje sistema u definisanoj ε – okolini klizne površi bez obzira na djelovanje ograničenih poremećaja. Za ispunjenje ovih zahtjeva, kao i kod vremenski kontinualnih sistema s KR, postoji nekoliko pristupa nazvanih komutacionim šemama [50]. U odjeljku 4.2, objašnjena su četiri načina organizovanja KR koji vrijede i kod kretanja diskretnog sistema u KR.

U daljem izlaganju, smatraće se da je primijenjena tehnika raspredanja na potpuno nezavisne sisteme, pa će pažnja biti posvećena sistemima sa skalarnim upravljanjem, odnosno sistemima s jednim ulazom i jednim izlazom. Takođe, željena klizna površ biće označavana s $g(\mathbf{x})$.

Posmatrat će se dva slučaja:

- prvo, potpuno autonoman sistem bez poremećaja ($d(t) = 0$),
- sistem s poremećajem ($d(t) \neq 0$), koji uključuje vanjski poremećaj i promjenu parametara objekta upravljanja uz uslov da poremećaj pripada prostoru upravljanja, odnosno da ispunjava uslove invarijantnosti.

U opštem slučaju, kretanje diskretnog sistema s KR može se dekomponovati u tri faze: fazu dosezanja kvazi KR, fazu kvazi KR i stacionarno stanje. Moguća je i druga klasifikacija: faza dosezanja, faza komutacije i faza treperenja. Navedene faze mogu biti definisane na sljedeći način:

- Diskretni sistem s KR je u fazi dosezanja KR ako vrijedi:

$$\text{sign}(g(k+1)) = \text{sign}(g(k)), \quad k \in (0, k^*), \quad (8.12)$$

$$|g(k+1)| < |g(k)|. \quad (8.13)$$

- Diskretni sistem s KR je u fazi kvazi KR (faza treperenja) ako vrijedi

$$\text{sign}(g(k+1)) = -\text{sign}(g(k)). \quad (8.14)$$

- Diskretni sistem s KR je u stacionarnom stanju ako se stanje sistema nalazi u zadatoj ε – okolini ravnotežnog stanja sistema što je koordinatni početak.

Iz prethodnog, a sa ciljem boljeg razumijevanja budućih izlaganja, pojam cik-cak KR je pojava definisana u [50]. Kvazi KR je kretanje definisano sa (8.10), a diskretni KR je kretanje definisano sa (8.11).

Stabilnost diskretnog sistema s KR analizirana je u [42], gdje je pokazano da je $g(\mathbf{x})$ stabilno u odnosu na sistem (8.2) i (8.3), ako i samo ako je $g(\mathbf{x})$ stabilno i atraktivno.

8.4. Uslovi privlačnosti $g(x)$ u vremenski diskretnom domenu

Za sistem upravljanja u vremenski kontinualnom domenu, opisan relacijama (8.1)–(8.2), za slučaj sistema s jednim ulazom $g(x)$ je privlačno ako je ispunjen sljedeći uslov

$$g(x)\dot{g}(x) < 0. \quad (8.15)$$

Ovaj uslov je predložio Dolgolenko (vidjeti [41]), a dobija se na osnovu primjene teorije stabilnosti Ljapunova za model sistema u prostoru klizne promjenljive, čije nulto stanje ravnoteže označava i privlačnost (atraktivnost). Koristeći funkciju Ljapunova

$$V(g) = \frac{1}{2}g^2, \quad (8.16)$$

i zahtijevajući da njen izvod duž trajektorija kretanja sistema bude negativno definitna funkcija, dobija se uslov (8.15).

U ranijoj fazi razvoja vremenski kontinualnih KR, umjesto (8.15) sljedeći uslovi:

$$\lim_{g \rightarrow 0^+} \dot{g} < 0, \quad \lim_{g \rightarrow 0^-} \dot{g} > 0, \quad (8.17)$$

su isključivo korišteni. Zbog toga su, i u prvoj fazi razvoja diskretnih KR, uslovi privlačnosti klizne promjenljive (8.15) i (8.17) prevedeni u diskretni domen kao [33, 38]:

$$g(x)\Delta g(x) < 0, \quad \lim_{g \rightarrow 0^+} \Delta g < 0, \quad \lim_{g \rightarrow 0^-} \Delta g > 0, \quad (8.18)$$

gdje je

$$\Delta g(k) = g(k+1) - g(k). \quad (8.19)$$

Dok su uslovi (8.15) globalni, uslovi (8.17) su lokalni. Prema tome, uslovi (8.15) su dovoljni uslovi stabilnosti KR u vremenski kontinualnom domenu, jer oni uključuju i lokalne (8.17). Nasuprot tome, uslovi (8.18) su samo potrebni ali ne i dovoljni uslovi stabilnosti [36]. Oni ne garantuju stabilnost diskretnog kvazi KR po definiciji (8.10). Da su uslovi (8.18) zaista potrebni uslovi, pokazano je u [39]. Koristeći funkciju Ljapunova oblika

$$V(k) = |g(k)|, \quad (8.20)$$

potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti diskretnog kvazi KR se dobijaju u obliku [36]

$$|g(k+1)| < |g(k)|. \quad (8.21)$$

Posljednji uslov se može dekomponovati na dvije nejednačine [36]:

$$(g(k+1) - g(k)) \text{sign}(g(k)) < 0, \quad (8.22)$$

$$(g(k+1) + g(k)) \text{sign}(g(k)) \geq 0. \quad (8.23)$$

Prva nejednačina u (8.22) je samo drugi oblik (8.18) i prema tome definiše potrebne uslove za nastanak diskretnog kvazi KR. Druga nejednačina u (8.23) daje dovoljne uslove za nastanak diskretnog kvazi KR. Ova nejednačina takođe ukazuje da ako kvazi KR postoji, tada fazne trajektorije sistema presijecaju kliznu površ u svakom periodu uzorkovanja i da distanca fazne tačke od klizne površi u $(k+1)$ -om periodu uzorkovanja nije veća od distance u k -tom periodu uzorkovanja. Uslovi (8.22) i (8.23) određuju maksimalnu i minimalnu vrijednost upravljanja, koje zavisi od distance stanja sistema od klizne površi [54]. Ovi uslovi se mogu dobiti i primjenom funkcije Ljapunova

$$V(k) = g^2(k), \quad (8.24)$$

odakle se dobija

$$\Delta V(k) = g^2(k+1) - g^2(k) = (g(k+1) - g(k))(g(k+1) + g(k)) < 0. \quad (8.25)$$

Množeći (8.25) s $\text{sign}^2(g)$ i uzimajući u obzir potrebne uslove, dobija se (8.22) i (8.23).

Uslovi egzistencije diskretnog kvazi KR su dobijeni u obliku

$$\Delta V(k) = g^2(k+1) - g^2(k) = 2g(k)\Delta g(k) + (\Delta g(k))^2 < 0. \quad (8.26)$$

Najzad, konvergentni diskretni kvazi KR egzistira na $g(x) = 0$ ako je [39]:

$$|g(k+1)g(k)| < g^2(k). \quad (8.27)$$

Uzimajući u obzir (8.11), diskretni KR (idealni) mora ispunjavati sljedeći uslov

$$g(k+1) = g(k) = 0, \quad \forall k \geq k^* \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}^+. \quad (8.28)$$

Relacija (8.28) je veoma značajna za diskretne KR.

8.5. Prikaz metoda upravljanja zasnovanih na diskretnim KR

U ovom odjeljku biće definisan pojam diskretnog ekvivalentnog upravljanja u diskretnim SUPS s KR.

Pretpostavlja se da u sistemu (8.8) i (8.9) postoji mogućnost mjerenja poremećaja i njegove potpune kompenzacije, što se u krajnjoj liniji svodi na upravljanje nominalnim sistemom. Osim toga, pretpostaviće se da je klizna promjenljiva linearna funkcija stanja, odnosno da je klizna površ zapravo ravan

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{c}_d \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \quad (8.29)$$

Zadatak je da se dosegne površ $g(\mathbf{x}) = 0$, iz bilo kojeg početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ u konačnom broju perioda uzorkovanja. Za dati sistem, ovaj zadatak se može ostvariti na više načina. Najprije će biti prikazane dvije metode koje su nastale diskretizacijom kontinualnih algoritama promjenljive strukture iz prve etape razvoja SUPS. Metode uslovno nazivamo kvazi-relejnim i relejnim.

Upravljanje kod kvazi-relejne metode se formira na sljedeći način

$$u(k) = - \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i(k)| \text{sign}(g(k)), \quad \omega_i > 0. \quad (8.30)$$

gdje su $x_i(k)$ koordinate stanja objekta upravljanja (najčešće izlaz i njegovi diferencijali), a ω_i pojačanje koje treba da obezbijedi nastanak KR.

Iz izraza se može zaključiti da je amplituda signala upravljanja $u(k)$, do dolaska u oblast klizanja, kontinualna funkcija vremena, a po ulasku u režim klizanja ona postaje prekidna funkcija čija će amplituda eksponencijalno opadati do dolaska u stanje ravnoteže. Kada $T \rightarrow 0$, osobine sistema će težiti osobinama sistema s kontinualnim KR [31, 32]. Ovdje je važno naglasiti da će se željeni diskretni kvazi KR kretanja odvijati u graničnom sloju.

Granični sloj predstavlja oblast oko klizne površi $g(k) = 0$, odnosno zadata je kao njena pogranična ε – okolina, u kojoj se odvija željeni diskretni kvazi KR kretanja.

Primjer 8.1

U cilju ilustracije ovog algoritma, ali i svih drugih u ovom odjeljku, biće razmatran primjer sistema drugog reda čiji je objekat upravljanja opisan sljedećim modelom [74]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 - 2x_2 + u.$$

Iz modela se vidi da je objekat nestabilan (polovi su $s_1 = 1,44$ i $s_2 = -3.4495$). Minimalno pojačanje povratne sprege koje obezbjeđuje stabilnost sistema je $K = 5$.

S obzirom na to da metoda imitira kontinualni algoritam, poželjno je da se izabere što je moguće manji period uzorkovanja u procesu komutacije struktura sistema. Zbog toga, radi ilustracije, biće pokazane osobine sistema pri većem i jedinstvenom (uniformnom) periodu uzorkovanja T u upravljanju i procesu komutacije struktura, a zatim kada je perioda komutacije struktura mnogo manja.

Neka je $T = 0,1s$ i $\omega_1 = 10$. Tada matrice sistema i klizna promjenljiva postaju:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1,0235 & 0,09139 \\ 0,4569 & 0,8407 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0,0047 \\ 0,09139 \end{bmatrix},$$

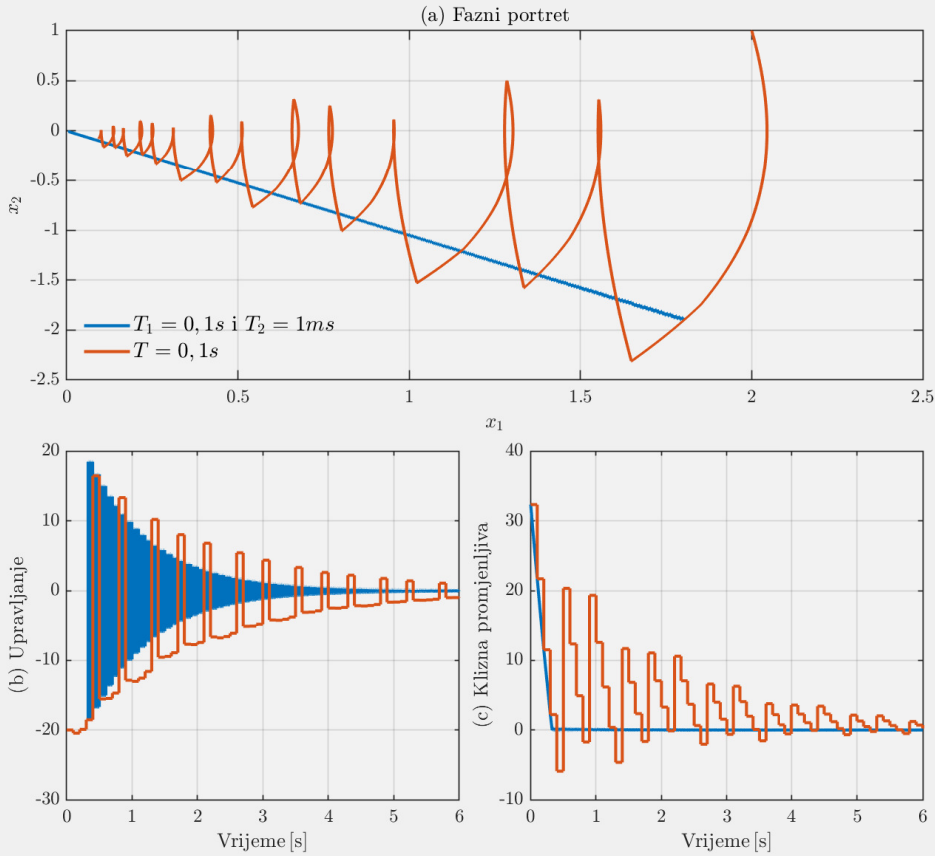
$$g(k) = \mathbf{c}_d \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,9875 & 10,3767 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = 0.$$

Za početno stanje $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$, dobija se $g(0) = 32,3516$.

Na slici 8.2(a) dat je fazni portret sistema (crvena trajektorija) na osnovu koga se zaključuje da u sistemu nastaje kvazi-klizni, haotični, režim kretanja s velikim graničnim slojem, što je neprihvatljivo.

U cilju poboljšanja može se drastično smanjiti period uzorkovanja T , odrediti adekvatna klizna promjenljiva, uz uslove dosezanja i stabilnosti. S obzirom na fleksibilnost sistema za diskretnu obradu informacija može se postupiti na

sljedeći način: zadržati period uzorkovanja u strukturama sistema $T_1 = T$, a drastično smanjiti period uzorkovanja u procesu komutacije struktura. To praktično znači da treba kliznu promjenljivu s unaprijed datim parametrima obraditi brže, a takođe i D/A konvertor mora raditi na većoj frekvenciji. Neka je period uzorkovanja u procesu komutacije struktura $T_2 = 0.01T$. Tada, fazni portret sistema (plava trajektorija) postaje blizak faznom portretu kontinualnog sistema. Na slici 8.2(b) i 8.2(c) su prikazani odgovarajući signali upravljanja i klizne promjenljive za posmatrana dva slučaja.



Slika 8.2. Fazni portret, signal upravljanja i klizne promjenljive za slučaj sistema s uniformnim periodom uzorkovanja i s različitim periodima uzorkovanja

Kod relejnog algoritma, upravljanje je oblika

$$u(k) = -\alpha \operatorname{sign}(g(k)), \quad \alpha > 0. \quad (8.31)$$

Ovaj algoritam je jednostavniji za realizaciju, ali daje veoma slične rezultate prethodnom, s tom razlikom što je amplituda upravljanja ostaje konstantna u toku cijelog procesa regulacije. Ovo je nedostatak metode sa stanovišta pobuđivanja nemodelirane dinamike i energetske gubitaka.

Navedeni algoritmi nisu našli široku primjenu u savremenoj teoriji i praksi diskretnih sistema upravljanja s promjenljivošću strukturom. Savremeni sistemi se zasnivaju na metodi diskretnog ekvivalentnog upravljanja i Gaove metode zakona dosezanja.

Na osnovu teorije diskretnih sistema upravljanja i činjenice da se linearan kontrolabilan diskretni sistem može za konačan broj perioda uzorkovanja prevesti iz jednog stanja u drugo stanje, došlo se na ideju da se klizna površ dosegne za jedan period uzorkovanja [42]. Ovo se može matematički zapisati relacijom

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d u(k) = 0. \quad (8.32)$$

Rješavajući (8.32) po $u(k)$, pretpostavljajući $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d \neq 0$, dobija se:

$$u(k) = u^{sp}(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k). \quad (8.33)$$

Dobijeno upravljanje nazivamo vanjskim upravljanjem u^{sp} ili upravljanjem dosezanja.

Dalje, pošto je u jednoj periodu diskretizacije dosegnuto stanje $g = 0$, cilj je da se to stanje sistema i dalje zadrži. Zbog toga treba odrediti potrebno upravljanje, koje će biti nazvano unutrašnjim upravljanjem u^{un} ili ekvivalentnim upravljanjem u_{eq} . Koristeći relaciju $g(k+1) = g(k)$, može se pisati

$$\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d u(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1), \quad (8.34)$$

odakle se dobija

$$u(k) = u^{un}(k) = u_{eq}(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} [\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1)]. \quad (8.35)$$

Posljednje upravljanje drži stanje na $g(k) = 0$ za $\forall k \geq 1$. Prema tome, (8.35) je identično (8.33), tako da se može zaključiti da u diskretnom linearnom sistemu promjenljive strukture upravljanje dosezanja i ekvivalentno upravljanje su identični i čine jedinstveno upravljanje.

Ovo nije slučaj kod kontinualnih sistema promjenljive strukture, gdje ekvivalentno upravljanje ne može samostalno dovesti sistem u klizanje već zahtijeva dodatno upravljanje dosezanja.

Dakle,

$$u^{un}(k) = u^{sp}(k) = u_{eq}(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k). \quad (8.36)$$

Zamjenjujući (8.36) u (8.8) dobija se diferentna jednačina koja opisuje stanje nominalnog diskretnog sistema promjenljive strukture s KR

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d] \mathbf{x}(k), \quad (8.37)$$

gdje matrica

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \quad (8.38)$$

određuje sopstvene vrijednosti (polove) diskretnog sistema u KR.

Iz (8.37) treba uočiti da se skaliranjem (proporcionalnim smanjenjem (povećanjem) svih elemenata vektora $\mathbf{c}_d$ istim faktorom) ne mijenjaju sopstvene vrijednosti matrice (8.38) što će često biti korišteno.

Upravljanje (8.36) kao jedinstveno upravljanje dosezanja i ekvivalentno upravljanje, tj. klizno upravljanje, ima nedostatak velike vrijednost u režimu dosezanja klizanja. Naime, vrijednost upravljanja je utoliko veća ukoliko je stanje sistema dalje od klizne površi i što je manji period uzorkovanja T .

Da bi se pokazao ovaj nedostatak, koritiće se diskretni model sistema u tzv. δ – domenu, koji se dobija na osnovu Ojlerove aproksimacije diferencijala. Postoji jednoznačna transformacija parametara iz diskretnog šift–domena u δ – domen, koja je data sljedećim relacijama:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{A}_\delta T, \quad \mathbf{b}_d = T \mathbf{b}_\delta, \quad \mathbf{c}_d = \frac{\mathbf{c}_\delta}{T}. \quad (8.39)$$

Zamjenjujući $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{b}_d$ i $\mathbf{c}_d$ s $\mathbf{A}_\delta$, $\mathbf{b}_\delta$ i $\mathbf{c}_\delta$ u (8.36) dobija se

$$u_{eq}(k) = -(\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta)^{-1} \frac{\mathbf{c}_\delta}{T} (\mathbf{I} + T \mathbf{A}_\delta) \mathbf{x}(k) = -(\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta)^{-1} \left(\frac{\mathbf{c}_\delta}{T} + \mathbf{c}_\delta \mathbf{A}_\delta \right) \mathbf{x}(k). \quad (8.40)$$

Iz (8.40) jasno se vidi da ekvivalentno upravljanje, u δ -domenu, sadrži dvije komponente. Prva komponenta je obrnuto proporcionalna periodu uzorkovanja T , pa za male periode uzorkovanja ekvivalentno upravljanje postaje ekstremno veliko i problematično u praksi. Treba primijetiti i jednačinu

$$\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) = \frac{\mathbf{c}_\delta}{T} \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_\delta \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) = \frac{g_\delta(x)}{T} + \mathbf{c}_\delta \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k). \quad (8.41)$$

U KR je $g_\delta(\mathbf{x}) = 0$, pa ekvivalentno upravljanje u δ -domenu postaje

$$u_{eq}^\delta(k) = -(\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta)^{-1} \mathbf{c}_\delta \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) \xrightarrow{\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta = 1} -\mathbf{c}_\delta \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k), \quad (8.42)$$

dok

$$u_d^\delta = -(\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta)^{-1} \frac{g_\delta(x)}{T} \xrightarrow{\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta = 1} -\frac{g_\delta(x)}{T}, \quad (8.43)$$

ima ulogu upravljanja dosezanja, koje postaje jednako nuli u trenutku uspostavljanja klizanja.

S obzirom na to da upravljanje dosezanja može biti nedopustivo veliko, potrebno je uvesti odgovarajuća ograničenja na upravljanje. Neka je uvedena zona oko klizne promjenljive $g(\mathbf{x})$ definisana na sljedeći način

$$|g(\mathbf{x})| \leq \sigma \in \mathbb{R}^+, \quad (8.44)$$

i nelinearno upravljanje

$$u_i(k) = \begin{cases} u_o(k), & |g(\mathbf{x})| > \sigma, \\ u_{eq}(k), & |g(\mathbf{x})| \leq \sigma. \end{cases} \quad (8.45)$$

Ovaj tip nelinearnog upravljanja može imati različite realizacije. Tako, na primjer, u [44] je predloženo upravljanje

$$u_o(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} (\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) - \beta g(k)), \quad \beta > 0. \quad (8.46)$$

koje će se ka zoni klizanja (8.44) veoma sporo približavati.

Zbog toga se u [49] predlaže

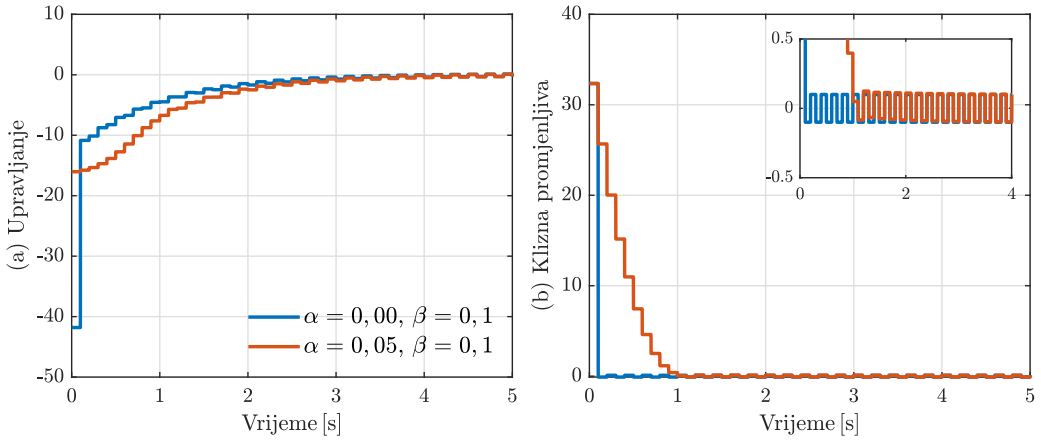
$$u_o(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} (\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) - \alpha g(k) + \beta \text{sign}(g)). \quad (8.47)$$

Birajući potrebne vrijednosti α i β u (8.47) moguće je definisati potreban broj perioda uzorkovanja do dolaska na izabranu oblast u okolini površi klizanja.

Ograničenje amplitude signala upravljanja $u(k)$ moguće je ostvariti i množenjem ekvivalentnog upravljanja, koje takođe može biti veliko pri samom startu kretanja sistema, faktorom $\frac{1}{1+\alpha|g(k)|}$. Tada se dobija upravljanje

$$u_o(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \left(\frac{1}{1 + \alpha|g(k)|} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \beta \text{sign}(g(k)) \right), \quad (8.48)$$

čija vrijednost amplitude je smanjena u režimu dosezanja dok njegova vrijednost u KR ostaje nepromijenjena. Izborom β može se podešavati širina kvazi-kliznog pojasa. Na slici 8.3 su prikazani signali upravljanja i klizne promjenljive za algoritam (8.48) pri različitim vrijednostima parametra α i $\beta = 0, 1$. Uočava se efikasnost smanjenja amplitude signala upravljanja u režimu dosezanja dok njegova vrijednost u kliznom režimu ostaje nepromijenjena. Izborom β može se podešavati širina kvazi-kliznog pojasa.



Slika 8.3. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.48) za različite parametre $\beta = 0, 1$ i $T = 0, 1$ s.

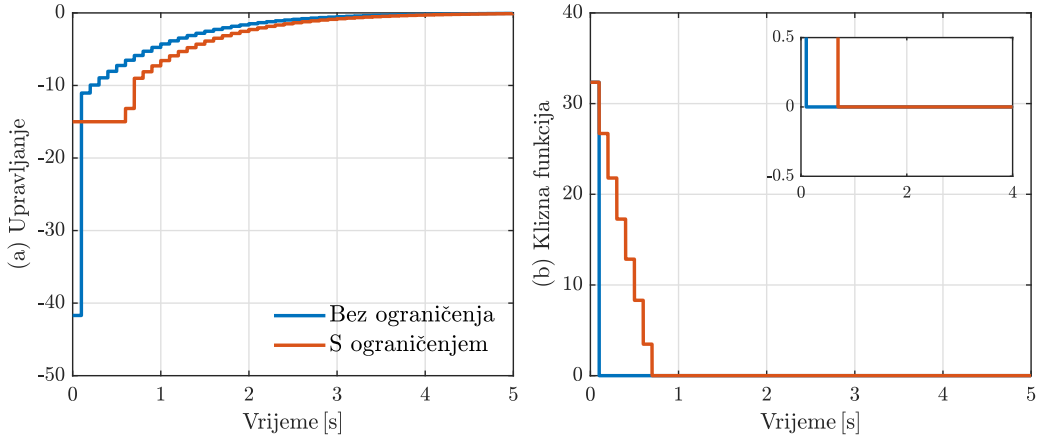
Međutim, treba imati u vidu da svaki objekat upravljanja ima prirodna ili neka tehnička ograničenja po pitanju amplitude signala upravljanja, pa je često potrebno unijeti ograničenja tipa zasićenja (saturacije). Tada upravljanje poprima oblik [52]:

$$u_i(k) = \begin{cases} U_o \frac{u_{eq}(k)}{|u_{eq}(k)|}, & u_{eq}(k) > U_o, \\ u_{eq}(k), & u_{eq}(k) \leq U_o. \end{cases} \quad (8.49)$$

gdje je U_o maksimalna dozvoljena vrijednost upravljanja za dati sistem.

U [52] je pokazano da je s upravljanjem (8.49) klizna površ atraktivna. U tom slučaju brzina dosezanja klizanja je maksimalna moguća za dati sistem. Kada sistem uđe u linearnu zonu, djeluje ekvivalentno upravljanje i sistem će za jedan period uzorkovanja dospjeti na kliznu površ. Upravljanje (8.49) je s graničnim sektorom. Slično se koristi i kod upravljanja kontinualnim sistemima u cilju eliminacije treperenja. Osnovna razlika između upravljanja (8.48) i (8.49) je u tome što sistem (8.49) „oštro“ ulazi u režim klizanja, dok (8.48) ima „blaži“ ulazak u klizanje što može imati prednost.

Na slici 8.4 su prikazani signali upravljanja i klizne promjenljive sistema iz primjera 8.1 s upravljanjem (8.49) bez ograničenja i s ograničenjem $U_o = 15$. Uočava se efikasnost smanjenja amplitude signala upravljanja u režimu dosezanja dok njegova vrijednost u KR ostaje nepromijenjena.



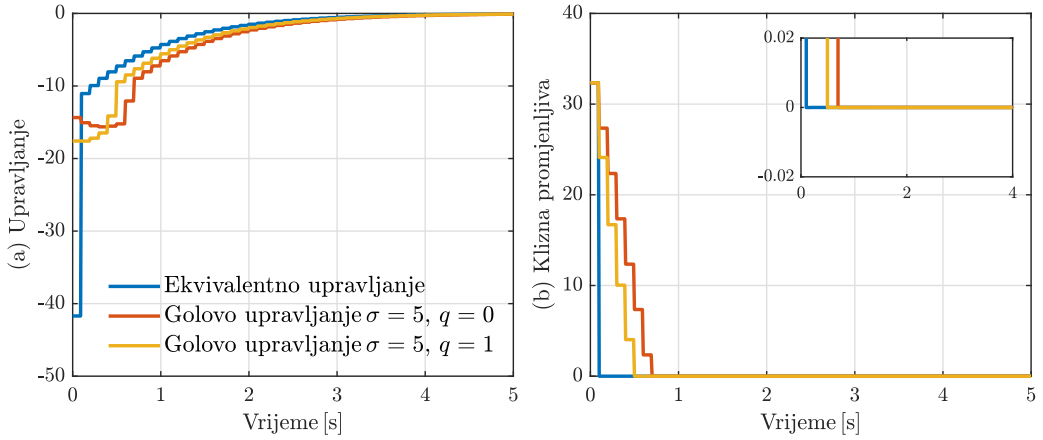
Slika 8.4. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.49) za različite parametre U_o i $T = 0, 1$ s.

Upravljanje (8.49) ima jedan nedostatak pa se ne preporučuje za primjenu u upravljanju nestabilnim objektima. Naime, kad je sistem u zasićenju, povratna sprega ne funkcionira a objekat je s konstantnim ulazom koji ga ne vodi ka željenoj poziciji.

Sljedeći način upravljanja s graničnim sektorom predložen je u [55] za sisteme opisane u δ – domenu. Kada se prevede u šift–domen, upravljanje postaje

$$u_o(k) = -(c_d b_d)^{-1} \left(c_d A_d x(k) - g(k) + \min \{ |g(k)|, \sigma + Tq|g(k)| \} \right) \text{sign}(g(k)), \quad (8.50)$$

gdje su $\sigma > 0$ i $q \geq 0$ proizvoljno odabrani parametri.



Slika 8.5. Signali upravljanja i klizne promjenjljive sistema s upravljanjem (8.50) za različite parametre σ i q pri $T = 0,1$ s.

Signali sistema iz primjera 8.1 s upravljanjem (8.50) u funkciji parametara σ i q dati su na slici 8.5 iz kojih se vidi da su algoritmi (8.49) i (8.50) u režimu klizanja isti, bez treperenja u upravljanju u nominalnim uslovima. Osnovna razlika se sastoji u tome što je algoritam (8.49) strogo ograničen parametrom U_o , dok u slučaju kod algoritma (8.50), upravljanje ne mora uvijek da bude monotono opadajuće. Algoritam (8.50) jednostavno se transformiše u algoritam (8.49).

U [38], Furuta je predložio algoritam upravljanja definisan sljedećim relacijama:

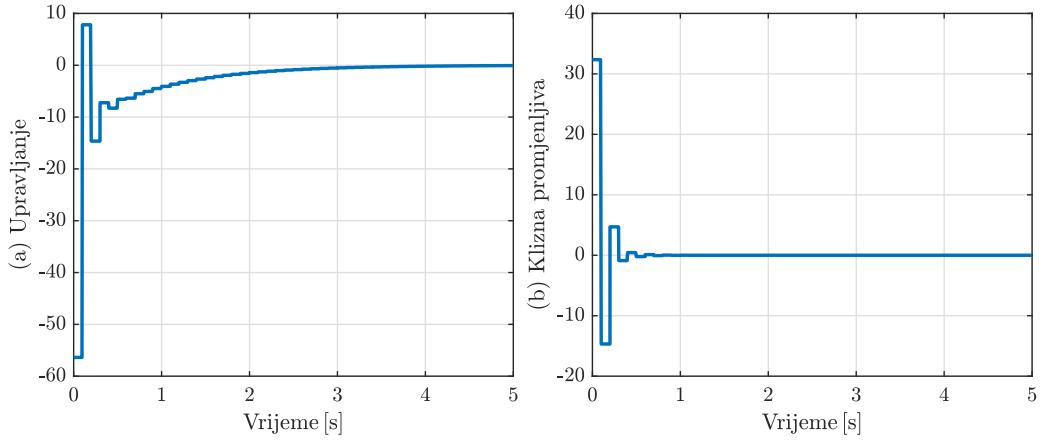
$$u(k) = u_{eq}(k) - (1 - \psi_o)g(k) - \psi x(k), \quad \psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n], \quad (8.51)$$

$$\psi_i = \begin{cases} \varepsilon, & \text{za } x_i(k)g(k) < -\delta_i, \\ 0, & \text{za } -\delta_i < x_i(k)g(k) < \delta_i, \\ -\varepsilon, & \text{za } x_i(k)g(k) > \delta_i, \end{cases} \quad (8.52)$$

$$0 < \psi_o < 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (8.53)$$

$$\delta_i = 0,5 \varepsilon (1 - \psi_o)^{-1} |x_i(k)| \sum_{j=1}^n |x_j(k)|. \quad (8.54)$$

Odgovarajući signali za ovaj tip upravljanju na sistemu iz primjera 8.1 su prikazani na slici 8.6. Ovdje, kvazi KR ostaje u domenu koji se ne poklapa s kliznom površinom, ali je veoma blizu nje. Samo upravljanje takođe nije prekidnog tipa.



Slika 8.6. Signal upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.51)-(8.54) uz parametre $\psi_o = 0,5$ i $\varepsilon = 0,5$ pri $T = 0,1$ s

Drugi, radikalniji pristup u oblikovanju upravljanja i u režimu dosezanja, predložio je Gao u [50], pod nazivom *metoda zakona dosezanja* (eng. *Reaching Law method*) na osnovu koje se kontroliše i dinamika sistema u režimu dosezanja i u KR. Predloženi zakon dosezanja je oblika

$$\Delta g(k) = -qTg(k) - \varepsilon T \text{sign}(g(k)), \quad (8.55)$$

gdje su $\varepsilon > 0$, $q > 0$ i $1 - qT > 0$ proizvoljno odabrani parametri.

Algoritam (8.55) uvijek obezbjeđuje dosezanje klizne površi. Brzina dosezanja se reguliše izborom parametara q , dok širina kvazi KR (cik-cak režima) zavisi od sva tri parametra q , ε i T .

Zamjenom $\Delta g(k) = g(k+1) - g(k)$ u (8.55), dobija se dinamika prekidačke funkcije opisana kao

$$g(k+1) = (1 - qT)g(k) + \varepsilon T \text{sign}(g(k)). \quad (8.56)$$

Za ovaj pristup, upravljanje se određuje na način da se $g(k+1)$ iz (8.56) izjednači s $g(k+1)$ određenim u relaciji (8.32).

Na ovaj način dobijena jednačina, rješava se po $u(k)$ i dobija se upravljanje oblika

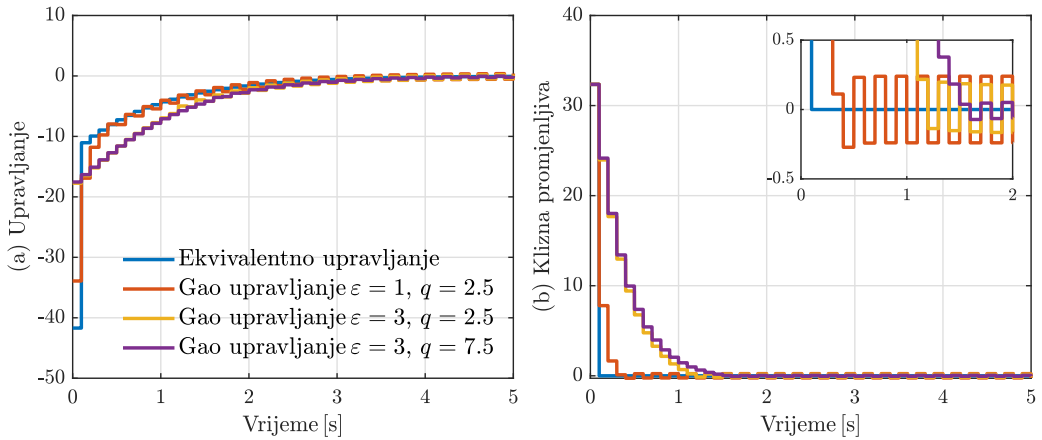
$$u(k) = -(c_d b_d)^{-1} \left(c_d A_d x(k) - (1 - qT)g(k) + \varepsilon T \text{sign}(g(k)) \right). \quad (8.57)$$

Da bi se odredila maksimalna širina graničnog pojasa pretpostavlja se da je sistem bio u stanju $g(k) < 0$ na granici pojasa čije dimenzije treba da se odrede. Prema zahtjevu, sistem mora da presiječe kliznu površ u datom periodu uzorkovanja, što znači da je $g(k+1) > 0$, ali se praktično nalazi u položaju $g(k+1) \approx 0$. Zamjenjujući u (8.56) lijevu stranu s nulom, može se dobiti ograničenje

$$|g(\mathbf{x}(k))| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}. \quad (8.58)$$

U ustaljenom stanju, cik-cak režim kretanja je simetričan u odnosu na kliznu površ, a to znači da je $|g(k+1)| = |g(k)|$.

Za sistem iz primjera 8.1, na slici 8.7 su prikazani signali upravljanja i klizne promjenljive s detaljem u ustaljenoj stanju za različite vrijednosti parametara ε i q pri $T = 0,1$ s. Jednostavno se može pokazati da granični pojas kretanja sistema u kvazi KR zadovoljava relaciju (8.58).



Slika 8.7. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.57) za različite parametre ε i q pri $T = 0,1$ s.

Bartošević u [53], koristeći algoritam (8.55), uvodi dodatnu kontrolu režima dosezanja, primjenom promjenljive po diskretnom vremenu klizne površi $g_d(k)$ definisane željenim brojem k^* perioda uzorkovanja T za koji se doseže površ klizanja $g_d(k)$ u obliku:

$$g_d(k) = \left(1 - \frac{k}{k^*}\right)g(0), \quad k^* < \frac{g(0)}{2\delta_d}, \quad \delta_d = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2}, \quad (8.59)$$

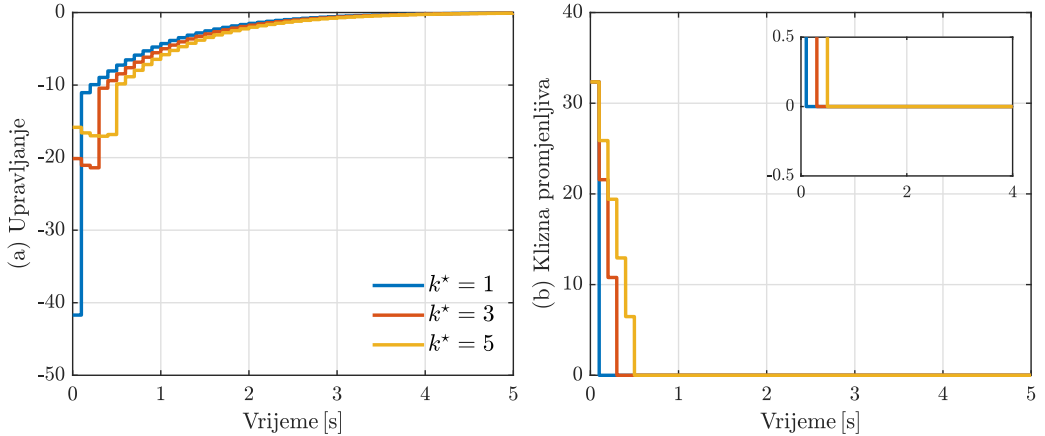
gdje su $d_{\max}$ i $d_{\min}$ maksimalna i minimalna vrijednost poremećaja.

Strategija upravljanja je definisana relacijom:

$$g(k+1) = d(k) - d_o + g_d(k+1), \quad d_o = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2}, \quad (8.60)$$

$$u(k) = -(c_d b_d)^{-1} \left(c_d A_d x(k) - g_d(k+1) + d_o \right) + \sum_{j=1}^{k-1} (g(j) - g_d(j)).$$

Na slici 8.8 dati su signali upravljanja i klizne promjenljive za sistem upravljanja objektom iz primjera 8.1 primjenom upravljanja (8.60) u nominalnim uslovima i $\sum_{j=1}^{k-1} (g(j) - g_d(j)) = 0$, za tri različite vrijednosti k^* . Može se uočiti jednostavna mogućnost smanjenja veličine signala upravljanja izborom odgovarajućeg k^* . Na slici desno su prikazani signali klizne promjenljive za odabrane vrijednosti parametra k^* . Primjenom kompletnog upravljanja, u nominalnim uslovima, postiže se veća tačnost u praćenju željene klizne promjenljive i u kompenzaciji poremećaja. Ovim algoritmom upravljanja se ulazi u probleme kompenzacije poremećaja. O tim problemima biće riječi kasnije.



Slika 8.8. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.60) za različite parametre k^* pri $T = 0,1$ s

Početna vrijednost upravljanja kod algoritama Gaoa i Bartoševića može dodatno umanjiti na način kao u (8.46) i (8.47), a to je moguće i u drugim algoritmima. Osim toga, treba reći da se u algoritmima (8.49) i (8.50) može dodati komponenta $\beta \text{sign}(g(k))$, kao u algoritmu (8.47). Tada ovi algoritmi u KR imaju karakter kretanja kao u Gaovom algoritmu. Takav pristup se preporučuje pri djelovanju poremećaja.

Na kraju, može se zaključiti da je Gaov metod zakona dosezanja [50] bazična metoda upravljanja zasnovana na diskretnim KR. Sve do sada poznate metode organizacije diskretnih kvazi KR mogu se posmatrati kao posebni slučajevi ove metode dosezanja [121]. U sljedećem odjeljku biće pokazani primjeri algoritama koji se lahko izvode iz Gaovog zakona dosezanja.

8.6. Detaljna analiza Golovog algoritma

U ovom odjeljku će biti pokazano da se algoritam (8.50) predložen u [55], može izvesti iz Gaovog algoritma (8.57) [50]. U tom cilju transformiše se algoritam upravljanja (8.57) iz šift-domena u δ – domen primjenom relacija (8.39) i ima oblik

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} \left(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + q g_\delta(k) + \varepsilon T \text{sign}(g_\delta(k)) \right). \quad (8.61)$$

U algoritmu (8.50) odsustvuje cik–cak režim kretanja jer u zoni klizanja djeluje samo ekvivalentno upravljanje i važi sljedeća relacija

$$\mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) = \mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \frac{1}{T} g_\delta(k), \quad (8.62)$$

jer **sign** komponenta u (8.50) je uvedena samo iz razloga pogodnijeg matematičkog zapisivanja, ali ne djeluje kao prekidna funkcija. Za $\varepsilon = 0$, upravljanje (8.61) je

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + q g_\delta(k)), \quad 0 < q < \frac{1}{T}. \quad (8.63)$$

Gao isključuje $q = \frac{1}{T}$ jer ne ispunjava njegovu definiciju zakona dosezanja da fazna trajektorija mora, u svakom periodu uzorkovanja T , presijecati $g_\delta(\mathbf{x}) = 0$. Za $q = \frac{1}{T}$, i u idealnim, nominalnim uslovima, u sistemu, ako stanje dođe u poziciju $g_\delta(k) = 0$, tada će $\text{sign}(g_\delta(k)) = 0$ i ta komponenta upravljanja u (8.61) nema uticaja bez obzira na ε . Međutim, u realnosti, zbog rezolucije A/D konvertora uvijek će se dolaziti do cik–cak režima kretanja i za $q = \frac{1}{T}$ i $\varepsilon \neq 0$.

U (8.63), za $q=0$ upravljanje se svodi na ekvivalentno upravljanje u δ – domenu $u_\delta^{\text{eq}} = (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} \mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k)$, koje kao i ekvivalentno upravljanje u kontinualnom domenu ne može da dovede sistem na kliznu površ ni za nominalni slučaj.

Za $0 < q < \frac{1}{T}$, stanje sistema će se asimptotski približavati kliznoj površi utoliko brže ukoliko vrijednost $q \rightarrow \frac{1}{T}$. Za $q = \frac{1}{T}$, sistem će doći u stanje na $g_\delta = 0$ i to za jedan period uzorkovanja.

Prema tome, Gaov zakon dosezanja, zbog prekidne komponente upravljanja $\varepsilon T \text{sign}(g_\delta(k))$, obezbjeđuje da stanje sistema dosegne $g_\delta(k) = 0$ i za $0 < q < \frac{1}{T}$, za konačno vrijeme, ali ne u trenutcima uzorkovanja, već između sukcesivnih trenutaka uzorkovanja. Nasuprot tome, algoritam (8.50) obezbjeđuje da stanje nominalnog sistema, u trenutku uzorkovanja, bude na kliznoj površi. U Gaovom algoritmu dominantni uticaj na brzinu dosezanja ima parametar q , ali i ε ima svoj doprinos. Po analogiji s algoritmima u kontinualnom domenu, i za $q = 0$, uz adekvatan izbor ε može se ostvariti cik-cak režim kretanja.

Osnovna ideja u algoritmu (8.50) je da se tokom dosezanja mijenja vrijednost parametra q i time utiče na brzinu dosezanja i veličinu signala upravljanja. Da bi se dostiglo stanje $g_\delta = 0$, na završnoj etapi dosezanja mora biti $q = \frac{1}{T}$. Pri tome se sistem najbrže kreće, pod uticajem (8.62), u kome dominantni uticaj ima komponenta g_δ/T za veliko početno stanje $g_\delta(0)$. Ovo upravljanje može imati jako velike vrijednosti koje često prekoračuju fizičke limite sistema. Zbog toga je potrebno razmotriti mogućnosti ograničenja uticaja ove komponente na ukupno upravljanje. U teoriji postoje sljedeći načini ograničenja vrijednosti upravljanja i podešenja brzine dosezanja $g_\delta = 0$:

1. Ograničavanje ukupnog upravljanja limitatorom, što je urađeno u algoritmu koji je predložio Bartolini i ostali [52]

$$u(k) = \text{sat}_{v_o} \left(-(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \frac{1}{T} g_\delta(k)) \right), \quad (8.64)$$

gdje sat_{v_o} predstavlja saturacionu funkciju definisanu kao

$$\text{sat}_{v_o}(x) = \begin{cases} v_o \text{sign}(x), & \text{za } |x| > v_o, \\ x, & \text{za } |x| \leq v_o, \end{cases} \quad v_o \in \mathbb{R}^+.$$

Upravljanje (8.64) u prvoj etapi dosezanja ima konstantnu vrijednost određenu saturacionom funkcijom. Po izlasku iz saturacije, trajektorija sistema će za jedan period uzorkovanja dospjeti na stanje $g_\delta = 0$. Nažalost, (8.64) se ne može primijeniti za upravljanje nestabilnim objektima ako početni uslovi dovedu sistem u saturacioni režim.

S obzirom na (8.62) ovaj algoritam je samo drugačiji oblik zapisivanja algoritma (8.49).

2. Ograničiti komponentu g_δ/T primjenom saturacionog elementa na sljedeći način

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} \left(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \text{sat}_{v_\delta} \left(\frac{g_\delta(k)}{T} \right) \right). \quad (8.65)$$

Poslije izlaska iz saturacionog režima, stanje sistema će za jedan period uzorkovanja dospjeti na $g_\delta = 0$. Upravljanje tokom dosezanja se mijenja, jer je komponenta δ – ekvivalentnog upravljanja u_δ^{eq} bez ograničenja i može se primjenjivati u slučaju upravljanja nestabilnim objektima.

3. U prvoj etapi dosezanja smanjiti intenzitet komponente dosezanja izborom q iz opsega $0 < q < \frac{1}{T}$. Kada se dostigne unaprijed zadat vektor u okolini $g_\delta = 0$, postaviti vrijednost q na $\frac{1}{T}$

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \psi(k)), \quad (8.66)$$

$$\psi(k) = \begin{cases} \gamma \frac{g_\delta(k)}{T}, & \text{za } |g_\delta(k)| > v_0, \\ \frac{g_\delta(k)}{T}, & \text{za } |g_\delta(k)| \leq v_0. \end{cases} \quad v_0 \in \mathbb{R}^+, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (8.67)$$

U ovom algoritmu, kao i u prethodnim, po dosezanju stanja $|g_\delta(k)| \leq v_0$, stanje sistema u jednom periodu uzorkovanja doseže stanje $g_\delta = 0$.

4. U algoritmu (8.50), kao i u (8.66), kretanje ka $g_\delta = 0$ kontroliše se na osnovu parametra q , ali se njemu, kada je u opsegu $0 < q < 1/T$ dodaje konstantni parametar $\sigma > 0$ tako izabran da vrijedi $\sigma + qg_\delta(0) < g_\delta(0)/T$, odnosno $\sigma + \gamma g_\delta(0)/T < g_\delta(0)/T$ ili $\sigma < (1 - \gamma)g_\delta(0)/T$, $0 < \gamma < 1$. U tom slučaju, može se primijeniti upravljanje (8.66), ali je bolje primijeniti sljedeći algoritam [55]:

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \psi(k)), \quad (8.68)$$

$$\psi(k) = \min \left\{ \sigma + \gamma \frac{|g_\delta(k)|}{T}, \frac{|g_\delta(k)|}{T} \right\} \text{sign}(g_\delta(k)). \quad (8.69)$$

jer se dešavaju blaži skokovi u upravljanju, što je, sa stanovišta sprečavanja pobude treperenja usljed nemodelirane dinamike, povoljnije.

5. U upravljanju stabilnim objektima mogu se kombinovati (8.64) i (8.68) na sljedeći način

$$u(k) = \text{sat}_{v_o} \left(-(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \psi(k)) \right), \quad (8.70)$$

gdje $\psi(k)$ je definisano sa (8.69).

6. Za nestabilne objekte se može preporučiti kombinacija (8.65) i (8.68) na sljedeći način:

$$u(k) = -(\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{b}_\delta)^{-1} (\mathbf{c}_\delta^T \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(k) + \psi(k)), \quad (8.71)$$

$$\psi(k) = \min \left\{ \sigma + \gamma \frac{\text{sat}_{v_o} |g_\delta(k)|}{T}, \frac{\text{sat}_{v_o} |g_\delta(k)|}{T} \right\} \text{sign}(g_\delta(k)). \quad (8.72)$$

Na ovaj način se može efikasno ograničavati preveliko upravljanje dosezanja pri velikim odstupanjima početnog stanja sistema od željene pozicije i adekvatno približavanje zadatoj poziciji bez većih skokova u upravljanju.

Primjer 8.2

Za ilustraciju algoritama upravljanja u kojim postoji ograničenje na upravljanje tipa saturacije biće korišten objekat opisan modelom

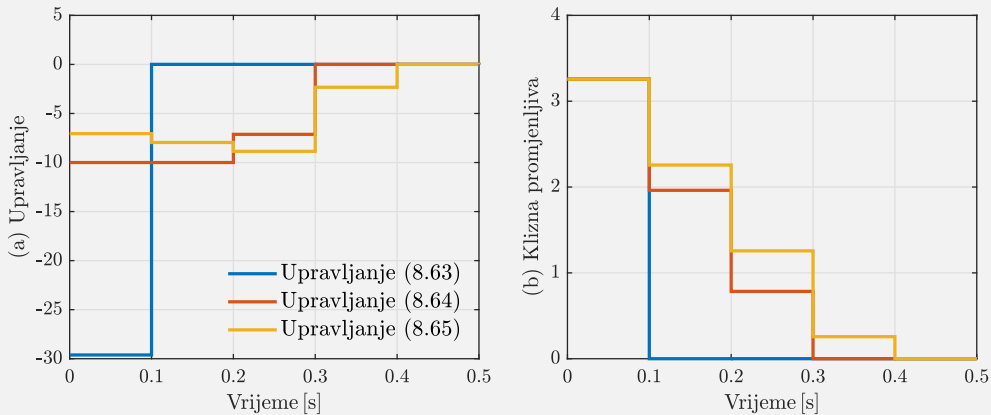
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2 + u(t).$$

Neka je početni uslov $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1]^\top$, dok je dinamika sistema u diskretnom KR zadata polovima $z_1 = 0$ i $z_2 = 0,9$. Primjenom postupka izračuna matrica datog relacijom (8.39), za $T = 0,1$ s i $c_\delta b_\delta = 1$, dobija se:

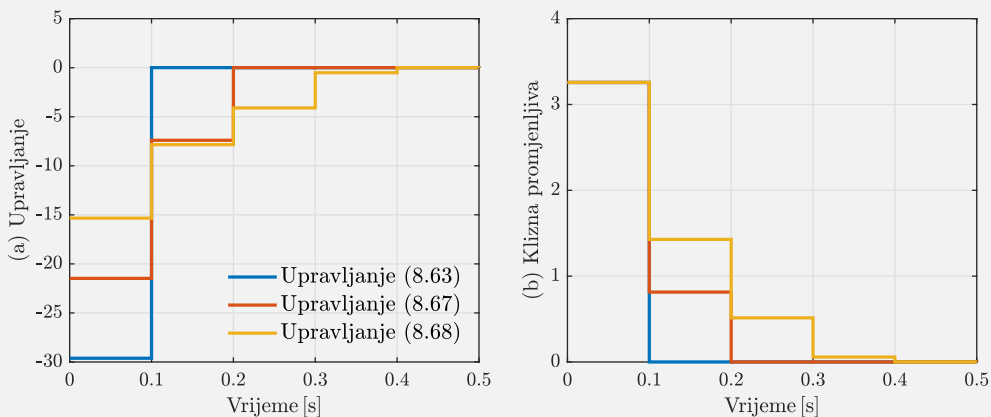
$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -0,0468 & 0,9048 \\ -0,9048 & -1,8565 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\delta = \begin{bmatrix} 0,0468 \\ 0,9048 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_\delta = [1,1042 \quad 1,0481],$$

na osnovu čega se može izračunati $g_\delta(0) = 3.26$. Na slici 8.9 prikazani su uporedni rezultati za sistem s upravljanjem (8.63), kada je $q = 1/T$, odnosno sistemi s upravljanjima (8.64) i (8.65).



Slika 8.9. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.63), (8.64) i (8.65) za $q = 1/T$

Na osnovu upravljanja i rezultata, prikazanim na ovoj slici, zaključuje se da su upravljanja (8.64) i (8.65) veoma jednostavna i da daju efikasno ograničenje upravljanja u režimu dosezanja. Pri tome prednost je na strani algoritma (8.65) jer upravljanje nije potpuno ograničeno, kao što je slučaj kod (8.64) i problematično za upravljanje nestabilnim objektima.



Slika 8.10. Signali upravljanja i klizne promjenljive sistema s upravljanjem (8.63) za $q = 1/T$, upravljanjem (8.66) i (8.67) za $\gamma = 0,75$ i $v_o = 1$, te upravljanjem (8.68) i (8.69) za $\gamma = 0,5$ i $\sigma = 2$

Sa slike 8.10 se vidi da u trenutku $t = 0,2s$, kod sistema (8.66) upravljanje naglo pada na nulu, dok kod sistema (8.68) taj proces ide sporije. Na osnovu prikazanog može se zaključiti da algoritmi upravljanja (8.65) i (8.68) imaju bolje osobine, ali algoritam (8.68) ima prednost. Zbog toga će se algoritam

upravljanja (8.68) nadalje koristiti, uz napomenu da se na osnovu njega može realizovati i Gaov zahtjev da zadata referenca klizne promjenljive bude presiječana u svakom periodu uzorkovanja (dodavanjem prekidačke komponente), a ostvaruje slične osobine kao i algoritam Bartoševića.

8.7. Diskretni KR u prisustvu poremećaja

U prethodnim izlaganjima razmatran je nominalni objekat na koji nije djelovao poremećaj. Sada će biti razmatran sistem s poremećajem opisan modelom (8.5) koji se, uz pretpostavku da pripada potprostoru vektora upravljanja, zapisuje kao

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k) + \mathbf{d}_d(k). \quad (8.73)$$

Prema metodi ekvivalentnog upravljanja može se zapisati

$$u(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} (\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \mathbf{d}_d(k)). \quad (8.74)$$

Ako je poremećaj mjerljiv, odnosno poznat, onda nije problem naći ekvivalentno upravljanje (8.74) i u potpunosti kompenzovati poremećaj, pod uslovom da podliježe diskretizaciji.

Međutim, problem je u tome što se u najvećem broju slučajeva poremećaj ne može mjeriti ili se ne zna da li ispunjava uslove ograničenosti u pogledu intenziteta i frekvencije u odnosu na brzinu djelovanja sistema upravljanja.

Iz (8.73) i (8.74) se vidi da se potpuna kompenzacija može ostvariti dodavanjem u upravljanje vrijednosti poremećaja sa suprotnim znakom. Pošto poremećaj ne može da se mjeri, on se mora kompenzirati na druge načine.

Standardno, tri načina se koriste u sistemima upravljanja. Prvi je primjena velikog pojačanja ispred djelovanja poremećaja, što je i suština primjene sistema upravljanja s povratnom spregom. Sistemi upravljanja s promjenljivom strukturom u KR pripadaju klasi sistema s velikim pojačanjem. Drugi način je primjena integralnog djelovanja za kompenziranje djelovanja poremećaja, jer integralno djelovanje unosi veliko pojačanje (astatizam) u ustaljenom stanju. Treći način je primjena estimatora (osmatrača) poremećaja. Estimatorima poremećaja biće posvećeno posebno poglavlje.

U narednom odjeljku razmatramo specifično rješenje djelovanja u diskretnim SUPS s KR. U njima uticaj poremećaja se smanjuje i smanjenjem perioda uzorkovanja. Prema tome, u cilju postizanja što bolje kompenzacije poremećaja na raspolaganju su nam različite metode ali i njihova kombinacija.

Nadalje će se ekvivalentnim upravljanjem smatrati samo ekvivalentno upravljanje računato na nominalnom sistemu. Najprije se određuje greška sistema s ekvivalentnim upravljanjem u prisustvu poremećaja u kanalu upravljanja, bez njegove kompenzacije primjenom estimatora ili integratora, kada se poremećaj može predstaviti kao $\mathbf{d}_d(k) = \mathbf{b}_d \tilde{d}_d(k)$, a pretpostavljajući da je $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$. Na osnovu relacije za prekidačku funkciju u šift-domenu

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d (u(k) + \tilde{d}_d(k)). \quad (8.75)$$

Zamjenjujući $u(k) = u^{\text{eq}}(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k)$ i $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$, dobija se

$$g(k+1) = \tilde{d}_d(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = \frac{\mathbf{c}_\delta}{T} \mathbf{x}(k+1) \rightarrow \mathbf{c}_\delta \mathbf{x}(k) = T \tilde{d}_d(k-1). \quad (8.76)$$

Prema tome, odstupanje klizne promjenljive od zadate nulte vrijednosti u δ -domenu, odnosno greške sistema, biće srazmjeran periodu uzorkovanja T . To je još jedan način smanjivanja uticaja poremećaja kod diskretnih sistema s KR.

Dalje će biti dat kratki osvrti na estimaciju poremećaja na osnovu nominalnog diskretnog modela objekta u sistemu upravljanja. Zamjenom $k \equiv k-1$ u (8.73), vrijedi $\mathbf{x}(k+1) \rightarrow \mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k) \rightarrow \mathbf{x}(k-1)$, $u(k) \rightarrow u(k-1)$ i $d_d(k) \rightarrow d_d(k-1)$. Rješavajući ovu jednačinu po $d_d(k-1)$ dobija se

$$\mathbf{d}_d(k-1) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-1) - \mathbf{b}_d u(k-1), \quad (8.77)$$

koje može biti izračunato u svakom trenutku.

Vrijednost $\mathbf{d}_d(k-1)$ iz (8.77) se može uzeti kao estimirana vrijednost poremećaja $\tilde{d}_d(k)$ koja će biti dobra procjena ukoliko je poremećaj sporopromjenljiva funkcija vremena a period uzorkovanja T male vrijednosti. Kompenzacija se jednostavno ostvaruje tako što se u signalu upravljanja (8.74) umjesto $\mathbf{d}_d(k)$ piše $\mathbf{b}_d \tilde{d}_d(k)$. Koristeći (8.77) za $\tilde{d}_d(k)$ i pretpostavku $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$, dobija se izraz za upravljanje

$$u(k) = -(\mathbf{I} + \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{b}_d u(k-1). \quad (8.78)$$

koji predstavlja rekuzirvnu formu za izračunavanje upravljanja.

Primjer 8.3

Efikasnost kompenzacije poremećaja na opisani način biće ilustrovana na objektu iz primjera 8.1 kada na njegov ulaz djeluje poremećaj $d(t) = h(t - 5) + h(t - 10)\sin(\pi t)$.

Efekte ponašanja sistema s algoritmom (8.68) bez poremećaja, kao i u prisustvu datog poremećaja, biće ilustrovano u δ – domenu jer je predmetni algoritam izvorno koncipiran upravo u tom domenu a ne u šift–domenu. Upravljanje po ovom algoritmu u šift–domenu određeno je relacijom (8.50). Pri tom je važno istaći da su promjenljive $u(k)$, $d(k)$ i $\mathbf{x}(k)$ identične u oba domena dok se razlikuju isključivo proračunski elementi diskretnih matrica $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{A}_\delta$, vektora $\mathbf{b}_d$ i $\mathbf{b}_\delta$, kao i skalara g_d i g_δ .

U praksi je δ –domen često bliži vremenskom domenu od šift–domena, što olakšava interpretaciju i projektovanje. Zbog toga je pri zadavanju željenog ponašanja sistema (putem spektra polova u vremenskom domenu, šift–domenu ili δ –domenu) korisno imati na umu njihove međusobne relacije:

$$z_i = e^{s_i T}, \quad \gamma_{\delta i} = \frac{z_i - 1}{T},$$

gdje s_i označava polove sistema u kontinualnom (vremenskom) domenu, z_i polove u diskretnom šift–domenu, dok $\gamma_{\delta i}$ pripada diskretnom δ –domenu. Ove transformacije omogućavaju dosljedno prevođenje projektantskih kriterija (npr. brzina doseganja, stepen prigušenja, odziv bez/sa prebačajem) između različitih prikaza, uz očuvanje dinamičke interpretacije parametara algoritama.

Aktiviranje estimatora poremećaja na samom startu rada sistema ili pri naglim promjenama zadate vrijednosti (odnosno samog poremećaja) može imati neželjeni efekat u odnosu na metode ograničavanja upravljanja, osim u primjeni algoritma (8.64) gdje se pored toga može pojaviti i efekat velikog skoka. Zbog toga se preporučuje da se djelovanje estimatora poremećaja, koji u sebi sadrže i integralno djelovanje, aktivira tek u trenutku kada je u (8.72) funkcija $\psi(k) = \frac{g_\delta(k)}{T}$, tj. u završnoj etapi doseganja, dok kod algoritma tipa (8.64) odmah po izlasku iz saturacije. Takav postupak daje stabilniji prelaz i smanjuje rizik od prekomjernog upravljanja.

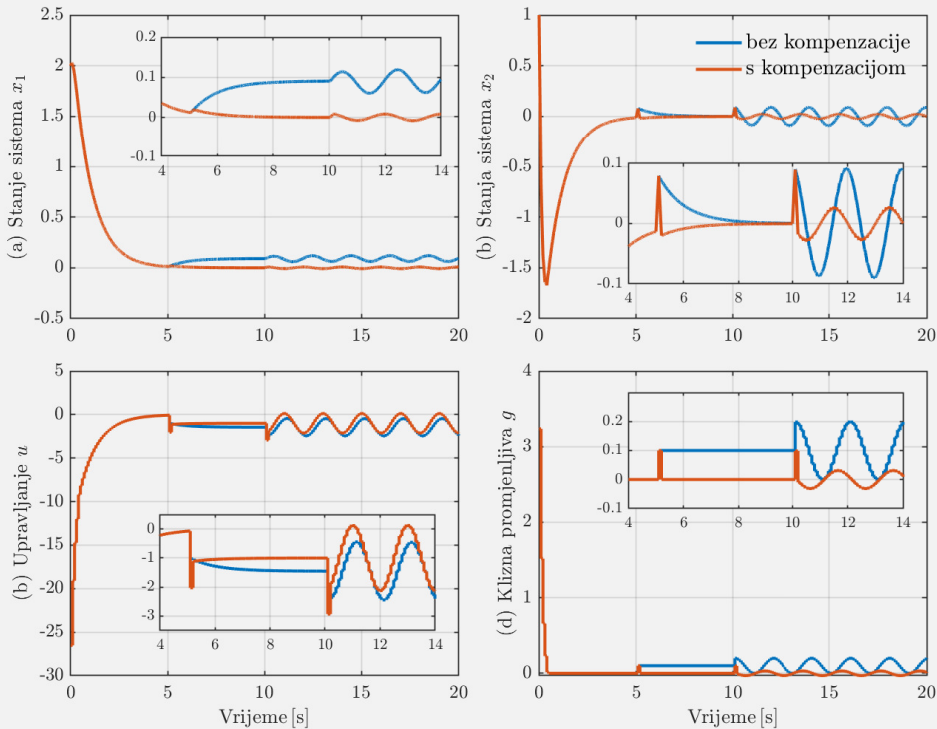
U nastavku posmatramo sistem za period uzorkovanja $T = 0,1$ s, a za početno stanje uzimamo $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Neka se od sistema zahtijeva da polovi u šift-domenu budu 0 i 0,9. Uz standardni uslov $\mathbf{c}_\delta \mathbf{b}_\delta = 1$, primjenom standardne procedure za razmatrani objekat dobijamo sljedeće parametre u δ -domenu:

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0,2351 & 0,9139 \\ 4,5696 & -1,5927 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\delta = \begin{bmatrix} 0,0470 \\ 0,9139 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_\delta = \begin{bmatrix} 1,0987 & 1,0377 \end{bmatrix},$$

na osnovu čega se može izračunati $g_\delta(0) = 3.235$.

Za parametre regulatora $\sigma = 1$ i $\gamma = 0,2$, na slici 8.11 su prikazani odzivi sistema s upravljanjem (8.68) bez i s estimatorom poremećaja (8.77).



Slika 8.11. Signali stanja sistema, upravljanja i klizne promjenljive za sistem bez i s kompenzacijom poremećaja

Iz eksperimenta se vidi da se postiže veoma efektivna kompenzacija poremećaja na jednostavan način. Treba obratiti pažnju na činjenicu da je odstupanje klizne promjenljive od nule za sistem bez kompenzacije poremećaja upravo T puta manje od poremećaja, a da se primjenom kompenzacije poremećaja odstupanje klizne promjenljive od zadate vrijednosti svodi na nulu.

Ovo vrijedi u slučaju konstantnih poremećaja ili poremećaja tipa step funkcije, dok se za vremenski promjenljive poremećaje ostvaruje značajno smanjenje odstupanja utoliko veće ukoliko je frekvencija promjene poremećaja niža.

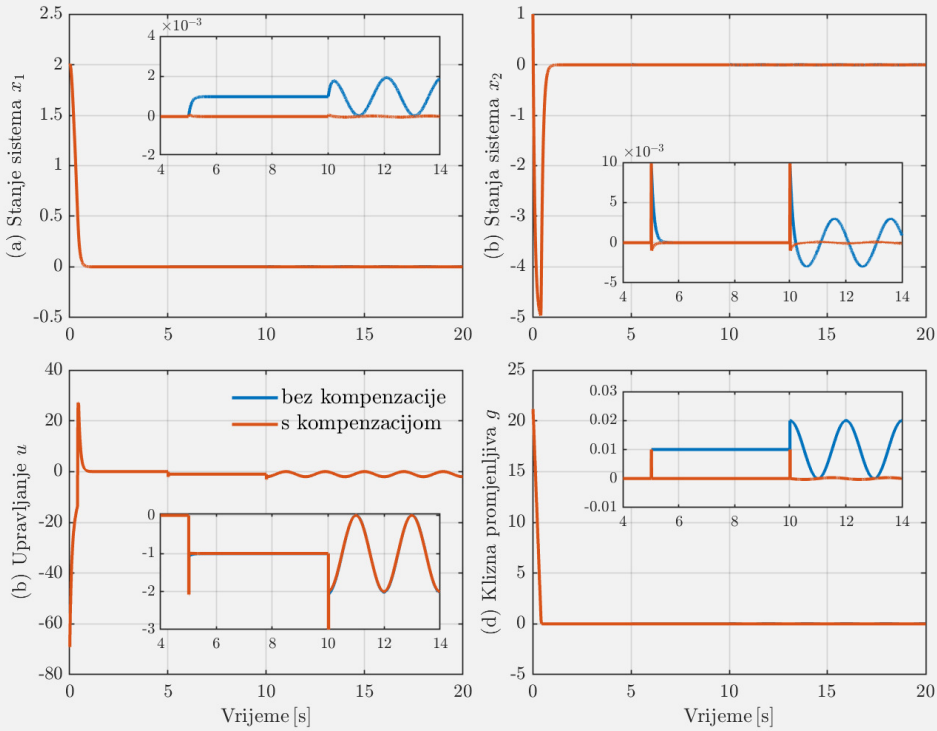
Primjer 8.4

U prethodnom primjeru period uzorkovanja je bio $T = 0,1 \text{ s}$. Neka je sada period uzorkovanja 10 puta manji ($T = 0,01 \text{ s}$), a parametri sistema i željeni polovi isti kao u prethodnom primjeru.

Matrice sistema će biti:

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0,0248 & 0,9901 \\ 4,9507 & -1,9554 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\delta = \begin{bmatrix} 0,0050 \\ 0,9915 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_\delta = \begin{bmatrix} 10,0999 & 0,9593 \end{bmatrix},$$

pri čemu početni uslov klizne promjenljive je $g_\delta(0) = 21.159$.

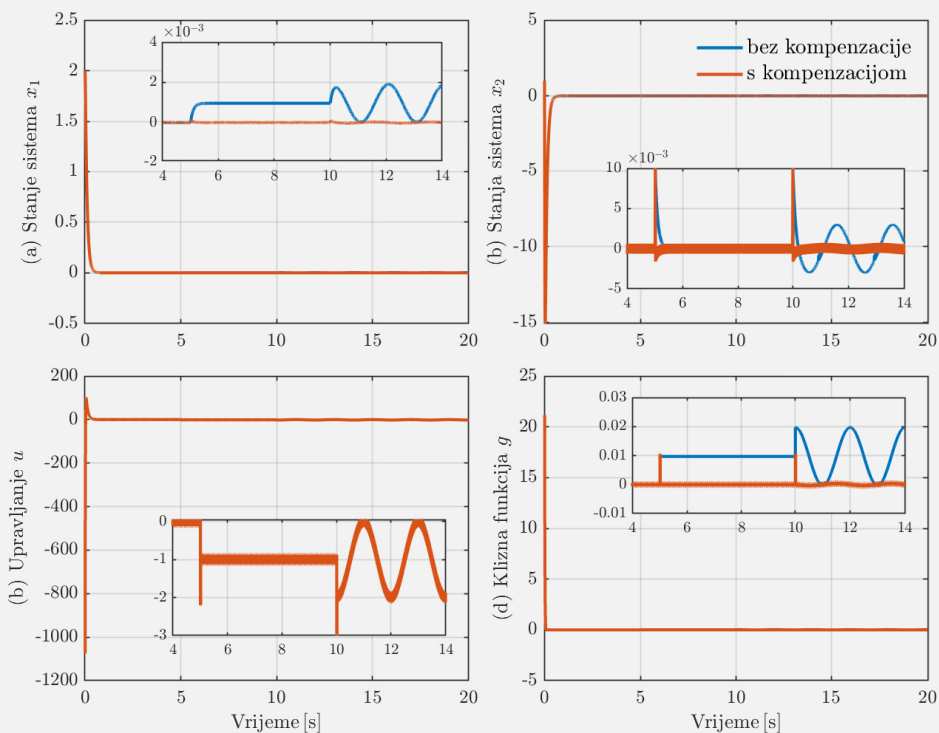


Slika 8.12. Signali stanja sistema, upravljanja i klizne promjenljive za sistem bez i s kompenzacijom poremećaja

S obzirom na to da će početno upravljanje dosezanja u δ – domenu biti dominantno određeno s $g_\delta(0)/T = 2116$, primjenice se algoritam upravljanja (8.72) sa saturacijom $v_0 = 1$ na signal g_δ/T , te parametrima $\sigma = 1$ i $\gamma = 0,2$. Rezultati za ovaj slučaj su prikazani na slici 8.12, koji potvrđuju naprijed navedene osobine. Treba obratiti pažnju da je početno upravljanje nešto manje od 40 (umjesto preko 2000). Uvođenje ograničenja na upravljanje u ovom primjeru imalo je za cilj da pokaže da se algoritam (8.72) može efikasno koristiti i u slučaju nestabilnog objekta.

Primjer 8.5

Na kraju, algoritmima upravljanja tipa (8.68) može se dodati prekidna komponenta $\varepsilon T \text{sign}(g(k))$ s vrijednošću εT neznatno većom od nekompenzirane vrijednosti poremećaja.



Slika 8.13. Signali stanja sistema, upravljanja i klizne promjenljive za sistem bez i s kompenzacijom poremećaja

Na ovaj način se organizuje cik-cak režim kretanja u okolini $g(k) = 0$, koji će sa smanjenjem T težiti idealnom KR kod kontinualnih sistema. Simulacioni rezultati za sistem iz prethodnog primjera za $T = 0,01s$ i $\varepsilon = 3$ prikazani su na slici 8.13. Kao što se vidi iz rezultata, u upravljanju se javlja treperenje ali male amplitude. To se odražava na pojavu cik-cak režima kretanja u kliznoj promjenljivoj i u koordinati x_2 , dok koordinata x_1 zbog filterskih osobina objekta ostaje glatka. U vezi s treperenjem u upravljanju može se javiti ozbiljan problem u sistemu ako postoji nemodelirana dinamika, kao što su neuračunate male vremenske konstante ili kašnjenja u izvršnim organima ili senzorima pozicije i brzine.

8.8. Diskretni integralni KR

Unošenje integralnog djelovanja u sistem je moguće ostvariti na više načina i to: unošenjem integralnog ili proporcionalno integralnog djelovanja na ulaz objekta (izlaz regulatora) i projektovati regulator za tako prošireni objekat. Jedna metoda estimacije poremećaja sistema s KR unosi integralno djelovanje paralelno regulatoru, o čemu će biti riječi u poglavlju o estimaciji poremećaja. Ovdje razmatramo metodu koja unosi integralnu komponentu u definiciju klizne površi. Metoda je za kontinualne sisteme predložena u [64], a za diskretne KR adaptirana u [65]. Metoda je primijenjena na primjeru regulacije brzine asinhronog motora [78].

Polazi se od sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k) + \mathbf{d}_d(k), \quad (8.79)$$

pa se definiše klizna površ na sljedeći način:

$$g(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}_d \mathbf{x}(0) + v(k), \quad (8.80)$$

$$v(k) = v(k-1) + \mathbf{w}_d \mathbf{x}(k-1), \quad \mathbf{w}_d \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \quad (8.81)$$

gdje $v(k)$ predstavlja promjenljivu koja unosi integrator. Prethodni izraz može biti izveden kao diskretizacija kontinualne preklidačke funkcije

$$g(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) - \mathbf{c} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{w} \mathbf{x}(\tau) d\tau = 0. \quad (8.82)$$

U [65] je za sistem (8.79)-(8.81), pretpostavljajući da je par $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$ potpuno kontrolabilan kada je moguće odrediti vektor povratne sprege $\mathbf{K}$ takav da su sve sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d \mathbf{K}$ različite i nalaze se u jediničnom krugu, moguće naći upravljanje

$$u(k) = (\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} (\mathbf{c}_d \mathbf{x}(0) - (\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d + \mathbf{w}_d) \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \tilde{\mathbf{d}}_d(k) + v(k)), \quad (8.83)$$

$$v(k) = v(k-1) + \mathbf{w}_d \mathbf{x}(k-1), \quad (8.84)$$

$$\mathbf{w}_d = -\mathbf{c}_d (\mathbf{A}_d - \mathbf{I} - \mathbf{b}_d \mathbf{K}), \quad \tilde{\mathbf{d}}_d(k) = \mathbf{d}_d(k-1). \quad (8.85)$$

Tada se sistem s povratnom spregom opisuje relacijom

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d \mathbf{K}) \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\xi}(k), \quad (8.86)$$

gdje je $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{O}(T^2)$, dok $\mathbf{d}_d(k)$ je $\mathcal{O}(T^2)$.

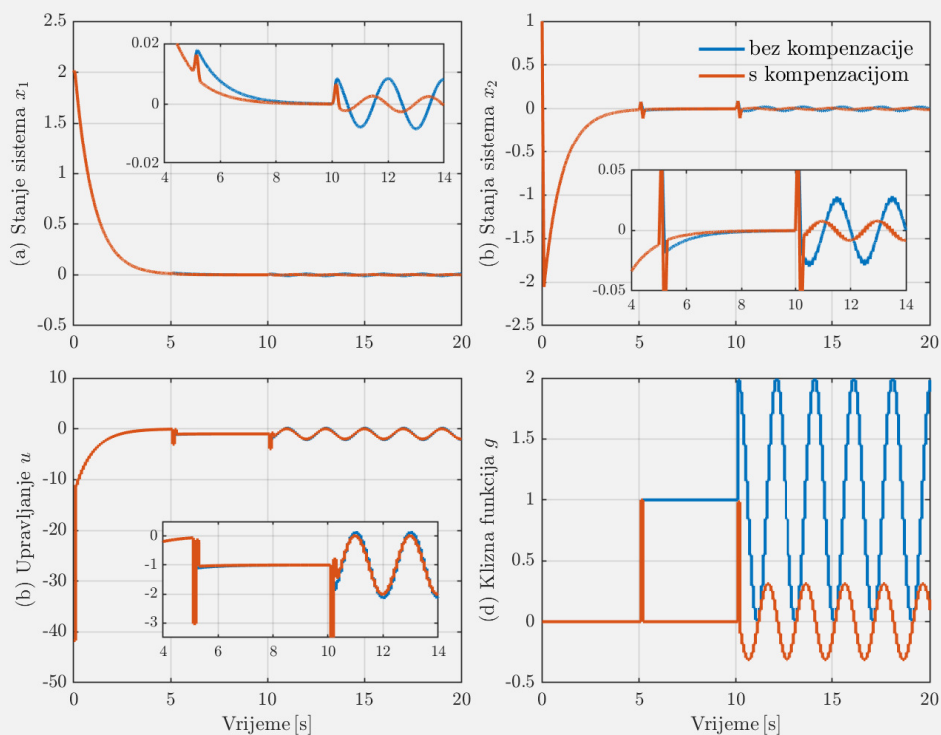
Dokaz je dat u [65]. Treba istaći činjenicu da se primjenom standardnih KR s estimacijom poremećaja postiže tačnost $\mathcal{O}(T)$. Na sljedećem primjeru biće prikazani efekti ovakvog upravljanja.

Primjer 8.6

Ovdje će se koristiti objekat iz primjera 8.1 pri istim parametrima sistema na koji djeluje poremećaj iz primjera 8.3. Vektor povratne sprege $\mathbf{K}$ i vektor konstanti integratora $\mathbf{w}_d$ dobiju se u formi $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 15,9875 & 9,7281 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{w}_d = \begin{bmatrix} 10,9875 & 10,3767 \end{bmatrix}$

Na slici 8.14 prikazani su simulacioni rezultati datog sistema. Iz prikazanog odziva klizne promjenljive se vidi da je vrijeme dosezanja klizne promjenljive jednako nuli. Radi poređenja s rezultatima iz primjera 8.3 (slika 8.11), vrijednosti klizne promjenljive sa slike 8.14(d) treba pomnožiti sa T .

Vidi se da su u odnosu na kliznu promjenljivu rezultati isti jer je klizna promjenljiva u ovom primjeru izvedena u šift-domenu pa je 10 puta veća od klizne promjenljive iz primjera 8.3 koja je izvedena u δ -domenu. Međutim, posmatrajući grafike stanja sistema vidi se da se primjenom integralnog KR ostvaruju mnogo veća tačnost.



Slika 8.14. Signali stanja sistema, upravljanja i klizne promjenljive za sistem bez i s kompenzacijom poremećaja

Problem uticaja nemodelirane dinamike je veoma akutan. Rješava se na više načina. Jedan od načina je smanjenje pojačanja u domenu klizanja, što pogoršava tačnost. Drugi način je, ako postoji mogućnost izvršiti kompenzaciju inercijalne nemodelirane dinamike, pomjerajući je u područje s manjom inercijalnošću. Takođe, ublažavanje se može ostvariti primjenom kliznih režima višeg reda i primjenom implicitne realizacije diskretnih algoritama.

★ ★ ★ ★ ★

9. Metode estimacije poremećaja u sistemima upravljanja zasnovanim na diskretnim KR

Kao što je rečeno, za razliku od KR u vremenski kontinualnom domenu, koji posjeduju potpunu invarijantnost na poremećaje koji djeluju na sistem preko kanala upravljanja, KR u vremenski diskretnom domenu nemaju tu osobinu. Problem nastaje zbog toga što je poremećaj nezavisan i ne podliježe diskretizaciji [47], već kontinualno djeluje na objekat upravljanja, dok je generisano upravljanje diskretno s konstantnim vrijednostima u periodima uzorkovanja.

Međutim, diskretni KR posjeduju robusnost, kao važnu osobinu, koja je funkcija frekvencije uzorkovanja. Usljed djelovanja poremećaja, kretanje sistema, poslije faze dosezanja, odvija se u okolini zadate klizne promjenljive. Širina tog graničnog sloja zavisi od primijenjenog algoritma upravljanja i intenziteta poremećaja. U najprostijem slučaju, ona je proporcionalna periodu uzorkovanja i intenzitetu poremećaja. U mnogim slučajevima takva širina graničnog sloja je neprihvatljiva, iz dva razloga: ostvarena tačnost regulisane promjenljive je nezadovoljavajuća i javlja se intenzivno treperenje upravljanja, što dovodi do buke, vibracije i bržeg habanja mehaničkih prenosnika u samom objektu upravljanja.

U cilju odstranjivanja navedenih nedostataka, odnosno njihove minimizacije, moraju se primjenjivati estimatori/kompenzatori poremećaja. U ovom odjeljku biće ukratko izložene najčešće korištene metode eliminacije djelovanja poremećaja na sistem u diskretnom vremenskom domenu koje uključuju:

1. Luenbergerov opserver poremećaja [115],
2. Estimator na osnovu nominalnog modela objekta [47],

3. Linearni aktivni eliminator poremećaja sistema [118],
4. Estimacija na osnovu klizne promjenljive [72, 74],
5. Aktivni estimator poremećaja [122, 123].

Poseban akcenat će biti na posljednje tri metode. Uz objašnjenje metoda biće prezentirana primjena navedenih metoda i njihovih kombinacija na jednostavnim primjerima.

Razmatra se sistem (8.1) sa skalarnim upravljanjem čiji je objekat upravljanja najčešće vremenski kontinualan proces opisan matematičkim modelom

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{d}f(t), \quad (9.1)$$

gdje su $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ stanje objekta, $u \in \mathbb{R}$ upravljanje i $f \in \mathbb{R}$ vanjski poremećaj. Matrica $\mathbf{A}$ i vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{d}$ su odgovarajućih dimenzija, a sistem (9.1) je kontrolabilan i opservabilan.

Objektom se upravlja primjenom digitalnog regulatora. Pri razmatranju neće biti uzimani efekti numeričke tačnosti zbog ograničene rezolucije A/D konvertora.

Posmatrajući dinamiku sistema kao diskretni sistem (eng. *Sampled Data System*), model sistema je matematički opisan jednačinom

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d(u(k) + d(k)), \quad \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}, d(k) \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Kod izvođenja ove relacije pretpostavljeno je da su svi navedeni poremećaji u (8.1) sporopromjenljive funkcije vremena, u odnosu na frekvenciju rada regulatora, da su primjenom (8.5) prevedeni u diskretni domen i da ispunjavaju uslove invarijantnosti [5], te se mogu objediniti u jedinstveni poremećaj d_k koji djeluje u kanalu upravljanja.

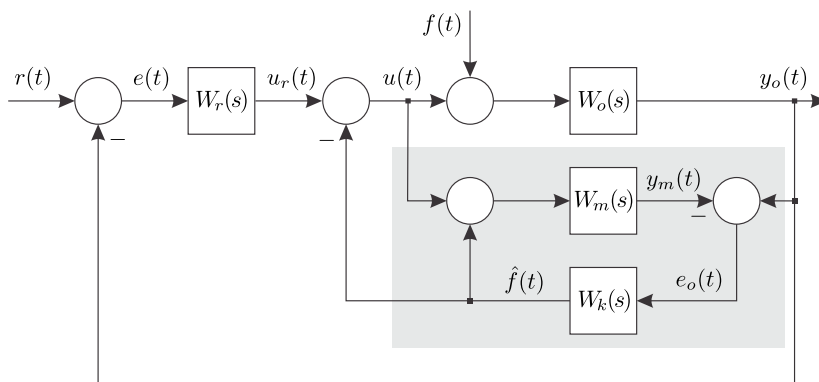
Nadalje, pretpostavlja se da ukupni poremećaj ispunjava Lipšicove uslove, te da je ograničen i da ima ograničen prvi izvod. Za takav poremećaj važe relacije:

$$d(k) = \mathcal{O}(T), \quad (9.3)$$

$$d(k) - d(k-1) = \mathcal{O}(T^2). \quad (9.4)$$

9.1. Luenbergerov opserver poremećaja

Luenbergerov opserver stanja za kontinualne sisteme je objašnjen u poglavlju 7. U ovom odjeljku će biti prezentiran Luenbergerov opserver poremećaja čija blokovska struktura u kontinualnom vremenskom domenu je prikazana na slici 9.1. Struktura za vremenski diskretni domen ostaje ista, samo se regulator sistema i opserver realizuju diskretno kao i signali uz primjenu odgovarajućih A/D i D/A konvertora. Na slici 9.1, W_o je prenosna funkcija objekta upravljanja na čiji ulaz djeluju upravljanje $u(t)$ i poremećaj $f(t)$. Usljed tog djelovanja, na izlazu objekta se javlja reakcija $y_o(t)$. Model objekta označen prenosom W_m i korekcionni element s prenosom W_k , zajedno s dva sumatora, čine opserver poremećaja (označeni pravougaonik). Izlaz korekcionnog elementa je estimirana vrijednost poremećaja, označena s $\hat{f}(t)$. W_r označava prenosnu funkciju osnovnog regulatora objekta W_o , koji nije od bitnog značaja za sintezu opservera poremećaja.



Slika 9.1. Sistem upravljanja s Luenbergerovim opserverom poremećaja

Sa slike 9.1 uočava se da opserver ima dva ulaza, upravljanje $u(t)$ i izlazni signal objekta $y_o(t)$, te jedan izlaz koji predstavlja estimiranu vrijednost poremećaja $\hat{f}(t)$. Uticaji ulaza u opserver na izlaz opservera, pa samim tim i na sistem, mogu se odvojeno posmatrati u slučaju linearnog sistema o kojem je ovdje riječ. Ulaz $u(t)$, u odsustvu ulaza $y_o(t)$, djeluje preko podsistema s negativnom povratnom spregom, u čijoj direktnoj grani je prenosna funkcija modela objekta W_m , a u povratnoj grani prenosna funkcija W_k . S obzirom na to da je izlaz ovog kanala negativan, a imajući u vidu da se ukupan izlaz opservera uvodi s negativnim znakom, ovaj kanal ostvaruje pozitivnu povratnu spregu nad jediničnim pojačanjem u kanalu upravljanja.

Ulaz $y_o(t)$ u opserver, za $u(t) = 0$, djeluje na podsistem s negativnom povratnom spregom, čija je direktna grana prenosna funkcija W_k , a u povratnoj grani je prenosna funkcija modela objekta W_m . Izlaz W_k je pozitivan, ali se uvodi s negativnim znakom u sumator, gdje se sabira s upravljanjem $u_r(t)$ koje generiše regulator. Na ovaj način, opserver realizuje povratnu granu podsistema s negativnom povratnom spregom, u čijoj je direktnoj grani redna veza prenosne funkcije ostvarene pozitivnom povratnom spregom kanala opservera po upravljanju $u(t)$ i prenosne funkcije objekta upravljanja W_o . S druge strane, kanal opservera po $y_o(t)$, djeluje paralelno s regulatorom sistema što se najbolje uočava ako je referentni signal sistema jednak nuli ($r(t) = 0$).

Iz klasične teorije sistema upravljanja je poznato da se kompenzacija poremećaja postiže unošenjem integralnog djelovanja ispred mjesta djelovanja poremećaja. Prema tome, kanal opservera po upravljanju unosi integralno djelovanje u sistem. To integralno djelovanje povećava red sistema i smanjuje marginu stabilnosti sistema u cjelini. S druge strane, kanal opservera po $y_o(t)$ treba da unese diferencijalno djelovanje u cilju poboljšanja stabilnosti sistema. Bitna osobina Luenbergerovog opservera je da ne utiče na dinamiku osnovnog sistema, odnosno da se dinamike osnovnog sistema i opservera mogu nezavisno podešavati. Drugim riječima, djelovanje navedenih kanala, u pogledu uticaja na stabilnost sistema, se međusobno kompenzuju. Prije nego što se pristupi određivanju uslova koje treba u opštem slučaju da ispunjava opserver sa slike 9.1, jedan jednostavan primjer sistema s opserverom poremećaja je projektovan u klasi SUPS s diskretnim KR.

Primjer 9.1

Neka je upravljani objekat čisti integrator kontinualnog tipa. Regulator sistema je projektovan u klasi SUPS s diskretnim KR [55]. Zbog diskretnog upravljanja, primijenjeno je kolo zadržke nultog reda tako da ekvivalentni objekat upravljanja s kolom zadržke ima funkciju prenosa $T/(z - 1)$. Upravljanje je

$$u(k) = -\frac{1}{T},$$

gdje je T period uzorkovanja i identičan je ekvivalentnom upravljanju u šift-domenu, odnosno upravljanju dosezanja u δ - domenu za dati objekat. Izabran je period uzorkovanja $T = 1 \text{ ms}$.

Neka na ulaz objekta djeluju poremećaji u obliku jedinične odskočne funkcije $f(t) = h(t - 1)$ ili sinusne funkcije $f(t) = \sin(\pi t)h(t - 1)$. Referentni signal je nula. Luenbergerov opserver poremećaja je realizovan diskretno. Model objekta uzima u obzir i kolo zadržske, tako da je prenosna funkcija modela takođe $T/(z - 1)$. Prenosna funkcija korekcionog elementa W_k je pojačanje $1/T$. Drugim riječima, i opserver je projektovan na isti način kao i osnovni regulacioni sistem.

Potrebno je odrediti ekvivalentne prenosne funkcije opservera po ulaznim signalima. U ovom primjeru prenosna funkcija po signalu upravljanja je

$$\frac{\hat{F}(z)}{U(z)} = \frac{1}{z}.$$

Ovaj element ostvaruje pozitivnu povratnu spregu nad jediničnim pojačanjem u kanalu upravljanja $u(t)$, tako da unosi integrator $\frac{z}{z-1}$ u kanal upravljanja ispred poremećaja.

Po izlaznom signalu objekta, prenosna funkcija opservera je

$$\frac{\hat{F}(z)}{Y_o(z)} = \frac{z - 1}{Tz},$$

a to je prenosna funkcija diskretnog diferencijatora.

Ukupna prenosna funkcija sistema opservera, u odsustvu regulatora sistema W_r ($u_r = 0$), biće

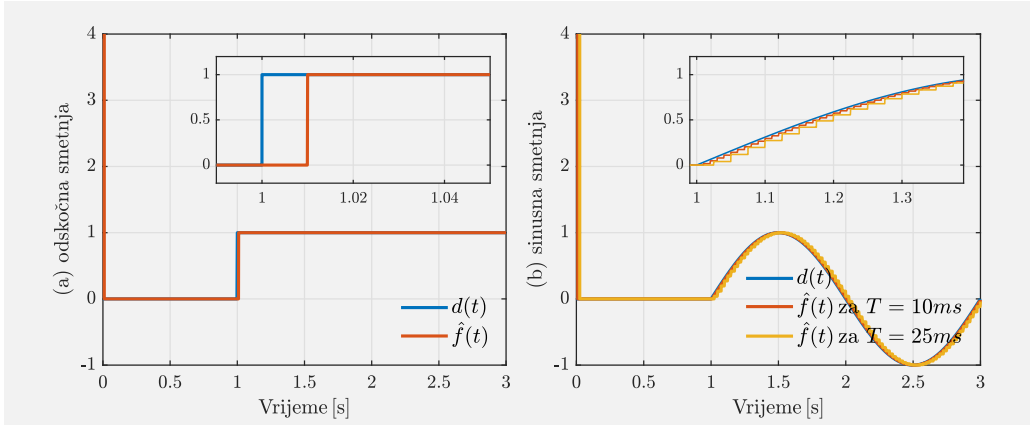
$$\frac{\hat{F}(z)}{F(z)} = \frac{1}{z},$$

pa je

$$\hat{E}_f(z) = F(z) - \hat{F}(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) F(z).$$

Slijedi da će dati opserver estimirati konstantne poremećaje bez greške, samo s kašnjenjem od jednog perioda uzorkovanja.

Sistem je simuliran, a rezultati simulacije vide se na slici 9.2. Na osnovu simulacije zaključuje se da dati estimator reprodukuje konstantne poremećaje bez greške, ali s vremenskim kašnjenjem od T sekundi (slika 9.2(a)). Sporopromjenljive poremećaje opserver će estimirati s greškom koja je utoliko manja ukoliko je frekvencija uzorkovanja veća, odnosno brzina promjene poremećaja manja.



Slika 9.2. Estimacija poremećaja tipa odskočne i sinusne funkcije Luenbergerovim opservatorom poremećaja

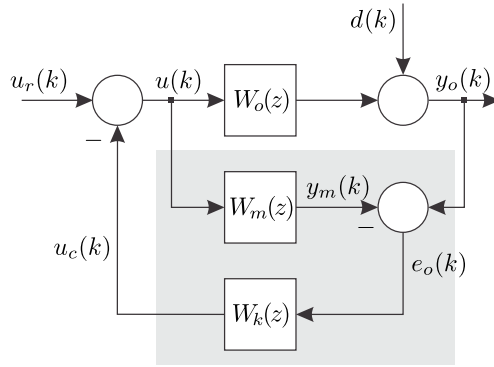
Na slici 9.2(b) su prikazani uvećani detalji estimacije za dva različita perioda uzorkovanja: 10 ms i 25 ms, iz kojih se jasno vidi uticaj perioda uzorkovanja na tačnost estimacije.

Neka se sada razmatra opštiji slučaj kada objekat upravljanja ima složeniju dinamiku. Struktura sistema i opserversa ostaje ista. Tada, za grešku estimacije $E_e(z)$, može se doći do izraza

$$E_e(z) = \frac{1}{1 + W_o(z)W_k(z)} F(z). \quad (9.5)$$

Iz izraza (9.5) zaključuje se da će greška estimacije težiti nuli ako imenilac (9.5) teži beskonačnosti. S obzirom na to da se ne može uticati na objekat, očigledno je potrebno da pojačanje $W_k(z)$ teži beskonačnosti. To se, u osnovi, svodi na osnovni princip upravljanja s povratnom spregom. Prema tome, u sintezi opserversa poremećaja treba koristiti sisteme s velikim pojačanjem, a sistemi s KR pripadaju toj klasi sistema. Iz klasične teorije sistema upravljanja je poznato da unošenjem integralnog djelovanja u sistem, a ovdje u $W_k(z)$, može se postići zadovoljavajuća tačnost estimacije poremećaja.

Poznati su i drugi slični prilazi estimaciji poremećaja. Ako se, na primjer, u sistemu na slici 9.1 analizira slučaj za ulaz $u_r = 0$, onda na sumator ispred modela sistema $W_m(z)$ dolaze signali koji se međusobno poništavaju i ne postoji ulaz u model $W_m(z)$. Prema tome, direktnu vezu od izlaza $W_k(z)$ do sumatora ispred $W_m(z)$ treba ukloniti. Tada se dolazi do strukture kao na slici 9.3 koja je detaljno analizirana u [124] u kojoj je vanjski poremećaj prenesen na izlaz objekta.



Slika 9.3. Modifikovani estimator sa slike 9.1

Osim toga, analiziran je i uticaj perturbacije parametara samog objekta kao aditivni poremećaj u prenosnoj funkciji objekta $\delta W_o(z)$. Izlazni signal objekta $Y_o(z)$ u funkciji upravljanja i poremećaja je

$$Y_o(z) = \frac{W_{on}(z)(1 + \delta W_o(z))}{1 + W_{on}(z)W_k(z)\delta W_o(z)} U_r(z) + \frac{1 - W_{on}(z)W_k(z)}{1 + W_{on}(z)W_k(z)\delta W_o(z)} D(z). \quad (9.6)$$

Iz (9.6) se vidi, ako se izabere $W_k(z) = W_{on}^{-1}(z)$, gdje je $W_{on}(z)$ prenosna funkcija nominalnog objekta upravljanja, tada vanjski poremećaj i perturbacije parametara objekta biće bez uticaja na izlaz sistema, tj. potpuno su kompenzovani.

Međutim, osnovni problem je u tome što su objekti upravljanja niskopropusni filtri, čiji je imenilac višeg stepena od brojioca pa je njegova inverzna funkcija nekauzalna, odnosno fizički neizvodiva. U cilju ostvarivanja ove ideje, sistemu se dodaje regulacioni podsistem o kome će biti riječi kasnije u odjeljku 9.5.

9.2. Estimator na osnovu nominalnog modela objekta

Ova metoda estimacije je veoma jednostavna i očigledna. U diskretnim KR je prvi put primijenjena u [120]. Neka je objekat upravljanja s jednim ulazom i jednim izlazom opisan modelom u prostoru stanja u diskretnom domenu relacijom (9.2) uz pretpostavke (9.3) i (9.4).

Neka se u nominalnom sistemu ostvaruje KR definisan relacijom

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = 0. \quad (9.7)$$

U prisustvu poremećaja, klizna promjenljiva (9.7) nije nula već je data izrazom

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d (u(k) + d(k)), \quad (9.8)$$

odnosno

$$g(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d (u(k-1) + d(k-1)). \quad (9.9)$$

Rješavanjem posljednje relacije po $d(k-1)$ dobija se

$$d(k-1) = (\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} (\mathbf{c}_d \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k-1) - u(k-1)). \quad (9.10)$$

Obično se usvaja da vrijedi $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$, tako da konačno izraz za estimaciju poremećaja u sistemu s diskretnim KR postaje

$$d(k-1) = g(k) - \mathbf{k}_{eq} \mathbf{x}(k-1) - u(k-1), \quad (9.11)$$

gdje je $\mathbf{k}_{eq} = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d$.

Na osnovu (9.11) ostvaruje se potpuna estimacija konstantnih poremećaja, samo s kašnjenjem od jednog perioda uzorkovanja. Sporopromjenljivi poremećaji estimiraju se s tačnošću obrnuto proporcionalnoj brzini promjene poremećaja.

U cilju kompenzacije poremećaja, ekvivalentnom upravljanju treba dodati kompenzacionu komponentu upravljanja $u_c(k)$, tako da ukupno upravljanje postaje

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_c(k) = u_{eq}(k) - d(k-1) = -\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)) - g(k) + u(k-1). \quad (9.12)$$

Primjer 9.2

Neka se primijeni dati postupak na objekat iz primjera 9.1. Za objekat tipa čistog integratora u diskretnom vremenskom domenu vrijedi $A_d = 1$, $b_d = T$, $c_d = \frac{1}{T}$, pa se na osnovu (9.11) dobija

$$\hat{d}(k) = d(k-1) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T} - u(k-1),$$

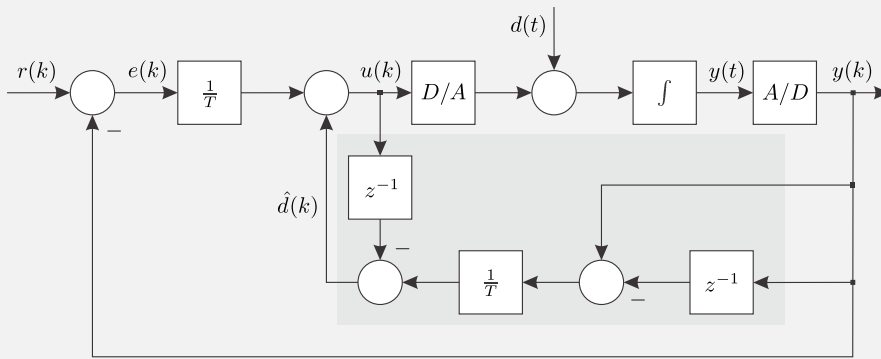
odnosno u kompleksnom domenu

$$\hat{D}(z) = \frac{z-1}{zT}X(z) - \frac{1}{z}U(z).$$

Upravljanje se dobija u formi

$$u(k) = -\frac{1}{T}(x(k) - x(k-1)) - \frac{1}{T}g(k) + u(k-1).$$

Blok struktura sistema s prethodno izvedenim estimatorom poremećaja data je na slici 9.4. Na slici se uočava da se u kanal upravljanja uvodi integrator $\frac{z-1}{z}$, a da se taj integrator zajedno s redno vezanim objektom upravljanja obuhvata diferencijalnom povratnom spregom $\frac{z-1}{zT}$.



Slika 9.4. Blok struktura estimatora poremećaja na osnovu nominalnog modela sistema u diskretnom domenu

U istoj strukturi se može koristiti Luenbergerov opservers poremećaja iz primjera 9.1, ako se izvrši dekompozicija o kojoj je bilo riječi. Takođe, može se pokazati da će polovi sistema upravljanja sa estimatorom i bez estimatora u ovom primjeru ostati isti, tako da ovaj tip estimatora ne mijenja dinamičke osobine polaznog sistema.

Nedostatak ovog estimatora u odnosu na Luenbergerov opservers poremećaja je neophodnost tačnog poznavanja parametara objekta. Kod Luenbergerovog opserversa povratna sprega ublažava taj nedostatak. Kroz prezentiranu analizu kao estimirana vrijednost poremećaja korištena je njegova vrijednost iz prethodnog trenutka uzorkovanja. Na taj način u potpunosti se estimiraju i eliminišu konstantni poremećaji. Ako je, po pretpostavci, poremećaj sporopromjenljiva funkcija

vremena, ostvariće se tačnost u regulaciji klizne promjenljive reda $\mathcal{O}(T^2)$ [47]. Dalje povećanje tačnosti može se postići ako se ne koriste samo uzorci poremećaja iz prethodnog $k - 1$ perioda uzorkovanja, već i uzorci iz $k - 2, k - 3, \dots$, pod uslovom neprekidnosti i ograničenosti diferencijala poremećaja.

U tom slučaju estimacija za $d(k)$ je

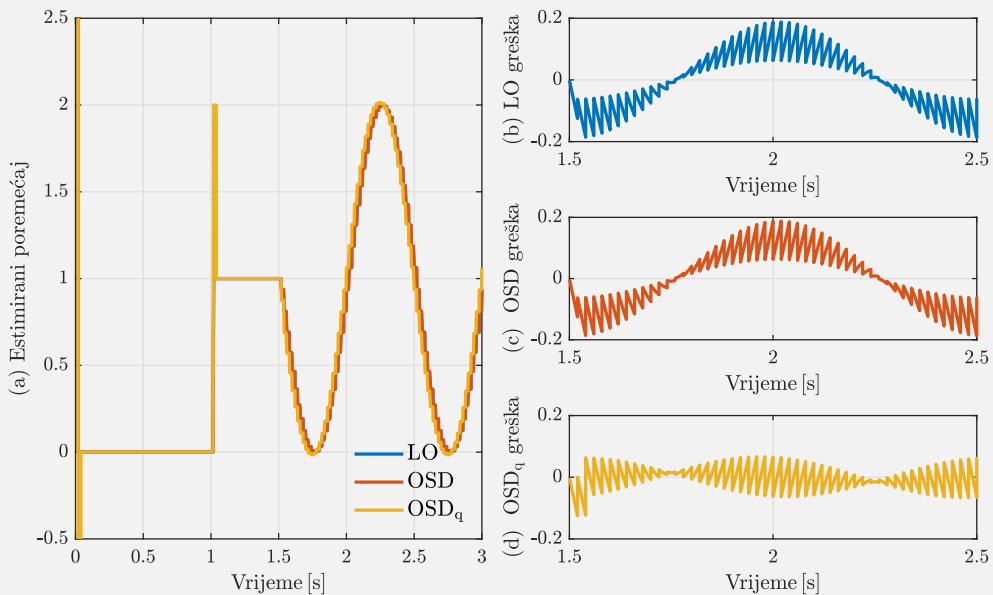
$$\hat{d}(k) = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i-1} \binom{q-1}{i} d_{k-i}. \quad (9.13)$$

Primjer 9.3

Za sistem iz primjera 9.2 potrebno je primijeniti dva načina estimacije poremećaja opisana u ovom odjeljku i uporediti međusobno rezultate estimacije s Luenbergerovim estimatorom. Kod primjene estimacije opisane sa (9.13) u cilju poboljšanja usvojiti $q = 2$. Neka je poremećaj definisan kao

$$d(t) = h(t - 1) + h(t - 1.5)\sin(2\pi t),$$

gdje je $h(t)$ jedinična Hevisajdova odskočna funkcija.



Slika 9.5. Estimacija poremećaja primjenom Luenbergerovog opserver (LO), estimatora na osnovu nominalnog modela definisan sa (9.11) (OSD) i estimatora na osnovu nominalnog modela definisan sa (9.13) (OSD_q)

Simulacijom su dobijeni rezultati prikazani na slici 9.5, gdje je prikazan signal greške sistema, odnosno klizna promjenljiva za tri analizirana slučaja. Vidi se da estimator definisan kao u prethodnom primjeru i Luenbergerov estimator daju potpuno iste rezultate (grafici *LO* i *OSD*). Estimator definisan s relacijom (9.13) za $q = 2$ se svodi na izraz

$$\hat{d}(k) = 2d(k-1) - d(k-2),$$

a rezultat je prikazan na istim slikama (grafik *OSD_q*), koji ukazuje na veoma visok stepen prigušenja poremećaja.

9.3. Linearni aktivni eliminator poremećaja sistema

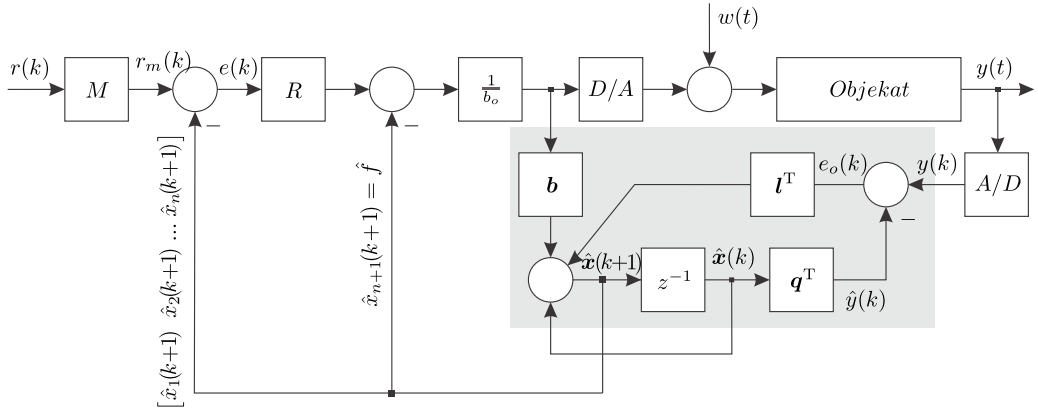
U odjeljku 7.4 je opisan sistem upravljanja u kontinualnom vremenskom domenu s estimacijom poremećaja primjenom proširenog opservera kojim se u značajnoj mjeri eliminiše treperenje u upravljanju. Eliminacija treperenja se postiže ne samo zbog aproksimacije **sign** funkcije, već i zbog toga što se koordinate stanja ne uzimaju sa samog objekta upravljanja već iz njegovog modela koji stvara svojevrsni bajpas za ovu neželjenu pojavu [125].

Iako je metoda razvijena u vremenski kontinualnom domenu, može se izvršiti diskretizacija datog algoritma, uz sve posljedice takvog pristupa, ili potražiti odgovarajuća digitalna metoda. Ovdje diskretni algoritmi upravljanja po stanju su poznati, a što se tiče proširenog opservera, on je Luenbergerovog tipa, te se može ostvariti po modelu prikazanom na slici 7.6, na kojem je prikazana jedna od mogućih konfiguracija.

Umjesto matrice **A** biće njen diskretni analog $\mathbf{A}_d = e^{AT}$, umjesto **b** diskretni analog $\mathbf{b}_d = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{b} d\tau$, integratori se zamjenjuju čistim kašnjenjem z^{-1} , s jediničnom pozitivnom povratnom spregom, vektor izlaza **q** ostaje neizmijenjen $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$, a vektor **l** zahtijeva dodatna razmatranja kojima će biti riječi u nastavku.

Na osnovu izabranog propusnog opsega ω_s sistema upravljanja objektom i definisanja propusnog opsega opservera ω_o , preko izabranog koeficijenta k_o , određuju se polovi opservera u z -domenu $z_i = e^{-T\omega_o}$, ($i = 1, \dots, n, n+1$). Time je definisan karakteristični polinom opservera:

$$D_o(z) = (z - z_o)^{n+1}. \quad (9.14)$$



Slika 9.6. Blok dijagram diskretnog opservera stanja

S druge strane, karakteristični polinom opservera, na osnovu parametara opservera sadržanih u matrici $\mathbf{A}_d$, vektorima $\mathbf{q}_d$ i $\mathbf{l}_d$, dat je izrazom

$$D_o(z) = \det \{z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{l}_d\mathbf{q}_d\}. \quad (9.15)$$

Razvijajući binom (9.14) i upoređujući koeficijente uz odgovarajuće eksponente z , dobija se $n + 1$ jednačina s $n + 1$ nepoznatih l_{di} .

Objekat prvog reda

Matrica stanja vremenski kontinualnog opservera, njegova fundamentalna matrica $e^{\mathbf{A}T}$, te diskretni domen su, respektivno:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{od} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Vektor ulaza u opserver u kontinualnom i diskretnom domenu je, respektivno:

$$\mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_o \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{od} = \int_0^T e^{\mathbf{A}T} d\tau \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_o T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Sada, karakteristični polinom opservera je

$$\det \left\{ z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{od} + \begin{bmatrix} l_{d1} \\ l_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = z^2 + (l_{d1} - 2)z + (1 - l_{d1} + Tl_{d2}), \quad (9.18)$$

odnosno

$$\begin{aligned} l_{d1} - 2 &= -2z_o, \\ 1 - l_{d1} + Tl_{d2} &= z_o^2. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Iz (9.19) slijedi

$$\begin{aligned} l_{d1} &= 2(1 - z_o), \\ l_{d2} &= T^{-1}(z_o - 1)^2. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Objekat drugog reda

Za drugi red sistema dobijaju se sljedeći izrazi. Matrica stanja opservera u diskretnom vremenskom domenu je

$$\mathbf{A}_{od} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Karakteristični polinom je

$$\begin{aligned} D_o(z) &= \det \{z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{l}_d \mathbf{q}_d\} = z^3 - (3 - l_{d1})z^2 + \\ &+ (3 - 2l_{d1} - \frac{T^2}{2}l_{d3} + Tl_{d2})z - (1 - l_{d1} - T^2l_{d3} - \frac{T^2}{2}l_{d3} + Tl_{d2}). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Upoređujući dati polinom s razvijenim binomom $(z - z_o)^3$ dobijaju se tri jednačine:

$$3 - l_{d1} = 3z_o, \quad (9.23)$$

$$3 - 2l_{d1} - \frac{T^2}{2}l_{d3} + Tl_{d2} = 3z_o^2, \quad (9.24)$$

$$1 - l_{d1} - T^2l_{d3} - \frac{T^2}{2}l_{d3} + Tl_{d2} = z_o^3, \quad (9.25)$$

čija su rješenja:

$$\begin{aligned} l_{d1} &= 1 - z_o^3, \\ l_{d2} &= 1 - \frac{3}{2T}(1 - z_o)^2(1 + z_o), \\ l_{d3} &= T^{-2}(1 - z_o)^3. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Po istom postupku se određuju elementi vektora povratne sprege opservera $\mathbf{l}_d$ za treći, četvrti, ..., n -ti red sistema.

Primjer 9.4

Za objekat iz primjera 7.4 projektovati diskretni regulator i diskretni prošireni opserver s periodom uzorkovanja $T = 1\text{ ms}$, tako da projektovani sistemi ima slične karakteristike kao u primjeru 7.4. S obzirom na to da je propusni opseg sistema definisan s $\omega_s = 5\text{ rad/s}$, polovi sistema u diskretnom domenu biće $z_{1,2} = e^{-\omega_s T} = 0,995$. Polovi opservera biće $z_o = e^{-3\omega_s T} = 0,9851$.

Za klasičan regulator, prema datim polovima povratna sprega po stanju se nalazi Akermanovom formulom koristeći MATLAB kod:

```
A=[0 1;0 0]; b=[0;1]; T=0.001;
[Ad,bd]=c2d(A,b,T);
p=[0.995 0.995];
k=acker(A,b,p);
```

koji kao rezultat daje matricu pojačanja $\mathbf{k} = [25 \ 9,9875]$.

Regulator promjenljive strukture s KR biće projektovan primjenom metoda [55, 56] iz odjeljka 4.3, i to iz z - i δ -domena primjenom MATLAB koda:

```
A=[0 1;0 0]; b=[0;1]; T=0.001; %Model objekta u s-dom
[Ad,bd]=c2d(A,b,T); %Određivanje matrica u z-dom
Add=(Ad-eye(2))/T; bdd=bd/T; %diskretni delta-dom
P_z_o=[0 0.9851]; %Željeni polovi u z-dom
P_delta=[0 (0.995-1)/T]; %Željeni polovi u delta-dom
k=acker(Add,bdd,p); %Ekviv. upravljanje u delta-dom
c=[k 1]*pinv([Add,bdd]); %klizna promjenljiva u delta-dom
```

na osnovu čega se dobija $\mathbf{k}_\delta = [0 \ 5]$ i $\mathbf{c}_\delta = [5 \ 0,9975]$.

Upravljanje je definisano u obliku:

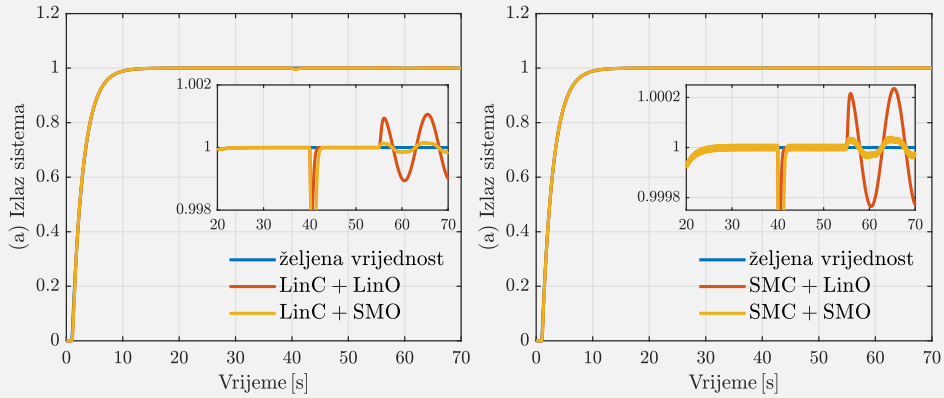
$$u(k) = -u_\delta^{eq}(k) - \frac{1}{T}g_\delta(k), \quad u_\delta^{eq}(k) = \mathbf{k}_\delta \hat{\mathbf{x}}(k), \quad g_\delta(k) = \mathbf{c}_\delta \hat{\mathbf{x}}(k).$$

U cilju ograničenja upravljanja u toku dosezanja klizne linije, uvodi se ograničenje na upravljanje koje poprima sljedeći oblik

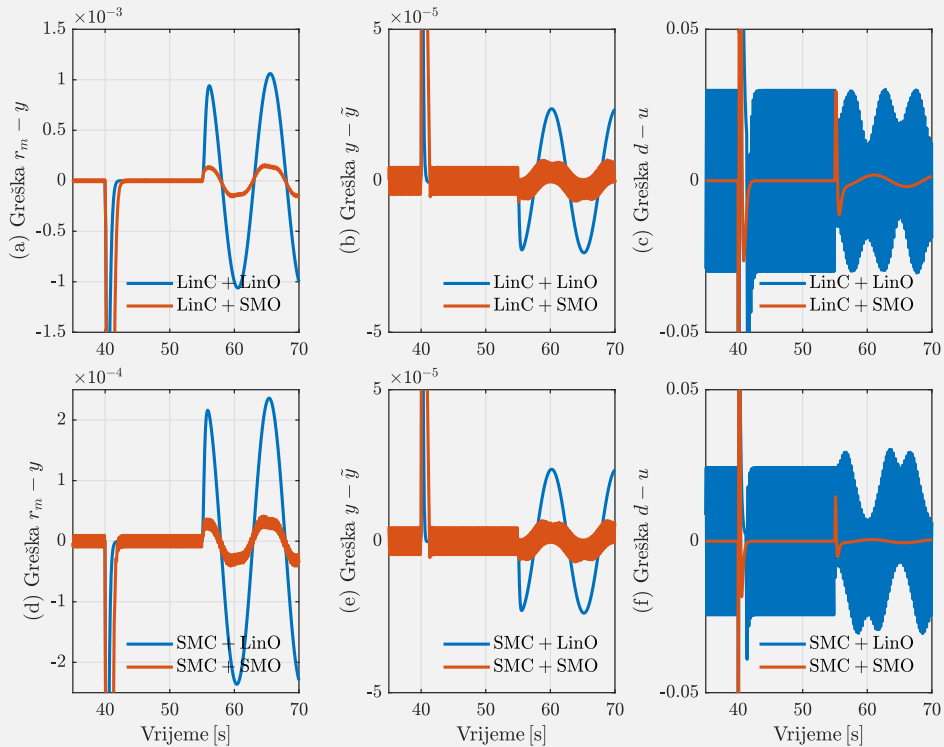
$$u(k) = -u_\delta^{eq}(k) - \min \left\{ \frac{1}{T}|g_\delta(k)|, \sigma + \frac{\gamma}{T}|g_\delta(k)| \right\} \text{sign}(g_\delta(k)),$$

gdje su γ i σ realni brojevi, takvi da je $0 < \gamma < 1$ i $\sigma > 0$, kojima se definiše širina klizne zone oko klizne linije.

Izabrani su $\gamma = 0,5$ i $\sigma = 2,5$. Uporedni rezultati klasičnog diskretnog sistema i diskretnog sistema s KR dati su na slikama 9.7-9.8.



Slika 9.7. Odziv sistema za različite tipove regulatora i opservera



Slika 9.8. Signali greški sistema za različite tipove regulatora i opservera

U zaključku treba reći da je data metoda veoma primjenljiva, naročito u sistemima nižeg reda gdje sve koordinate stanja nisu dostupne za neposredno mjerenje, što je značajno za primjenu algoritama s KR koji su robusniji i tačniji od konvencionalnih sistema upravljanja što se jasno uočava iz datih primjera.

9.4. Estimacija poremećaja na osnovu klizne promjenljive

Naprijed opisane metode estimacije poremećaja mogu se primjenjivati kako za kontinualne tako i za diskretne sisteme upravljanja klasičnog tipa, ali i za sisteme s diskretnim KR. Metoda koja će nadalje biti opisana namijenjena je samo za sisteme s diskretnim KR, a estimira poremećaje koji ulaze preko kanala upravljanja. Za takve poremećaje, KR u kontinualnom domenu su invarijantni, a u diskretnom domenu iako su robusni često zahtijevaju estimaciju i kompenzaciju poremećaja u cilju povećanja tačnosti i robusnosti sistema upravljanja.

Metoda je, najprije, uvedena u [53] a zatim u [70, 73, 126, 127] primijenjena na regulaciju pozicije motora jednosmjerne struje, te u [71] u regulaciji pozicije indukcionog motora i sintezi aktivnog estimatora poremećaja. U navedenim radovima, djelovanje na upravljanje sistemom i po integralu klizne promjenljive nosilo je heuristički karakter. Kasnije je matematički obrazloženo u [72] da integral klizne promjenljive u potpunosti estimira konstantne poremećaje koji djeluju u kanalu upravljanja. Osim toga, metoda je i dopunjena s estimacijom ne samo konstantnih već i složenijih poremećaja.

Slični pristupi publikovani su u naučnim radovima [74, 128, 129]. Osnovna odlika metode je krajnja jednostavnost. Međutim, za razliku od prethodno opisanih metoda, metoda estimacije poremećaja na osnovu klizne promjenljive ima uticaj na dinamiku i stabilnost sistema.

Neka je diskretni sistem s promjenljivom strukturom opisan jednačinom stanja

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d(u(k) + d(k)), \quad (9.27)$$

i kliznom promjenljivom

$$g(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k), \quad (9.28)$$

gdje su $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(k) \in \mathbb{R}$ upravljanje, $d(k) \in \mathbb{R}$ poremećaj,

$\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c}_d \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ su matrica stanja, vektor ulaza i vektor klizne promjenljive, respektivno, s konstantnim parametrima.

Uslov dosezanja i egzistencije idealnog diskretnog KR je

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = 0. \quad (9.29)$$

Na osnovu (9.27) i (9.29), uz uslov $d(k) = 0$, se nalazi diskretno ekvivalentno upravljanje za nominalni sistem u obliku

$$u(k) = u_{eq}(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k). \quad (9.30)$$

gdje $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d$ ne smije biti singularna veličina, ali se $\mathbf{c}_d$ može skalirati bez uticaja na sistem. Bez umanjavanja opštosti, nadalje će biti usvojeno da vrijedi $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$.

Odstupanje klizne promjenljive poremećenog diskretnog sistema (9.28) od željene vrijednosti (9.29) s upravljanjem (9.30) u k -tom trenutku uzorkovanja, identično je poremećaju u prethodnom trenutku uzorkovanja.

Ovo može biti pokazano na način da se zamjeni (9.30) u (9.27), uz uslov $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$, a zatim određujući (9.29) dobija se

$$g(k+1) = d(k), \quad \text{odnosno} \quad g(k) = d(k-1). \quad (9.31)$$

Ova činjenica omogućava estimaciju poremećaja u sistemima s diskretnim KR.

Uslov (9.29) za poremećeni sistem (9.27) moguće je ostvariti samo u idealnom slučaju, kada je poremećaj mjerljiv i dodaje se ekvivalentnom upravljanju sa suprotnim znakom $u(k) = u_{eq}(k) - d(k)$. Pošto to u praksi, u najvećem broju slučajeva, nije moguće onda se poremećaj estimira i dodaje se ekvivalentnom upravljanju kao kompenzaciono upravljanje $u(k) = u_{eq}(k) + u_c(k)$. Model sistema tada postaje

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d(u_{eq}(k) + u_c(k) + d(k)). \quad (9.32)$$

klizna promjenljiva u $k+1$ trenutku uzorkovanja će biti:

$$g(k+1) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k+1) = u_c(k) + d(k), \quad (9.33)$$

odnosno

$$g(k) = u_c(k-1) + d(k-1). \quad (9.34)$$

Ako je poremećaj sporopromjenljiva funkcija vremena, $d(k-1)$ se može iskoristiti kao kompenzaciono upravljanje $u_c(k) = -d(k-1)$, pa se (9.34) može napisati u obliku

$$u_c(k) = u_c(k-1) - g(k). \quad (9.35)$$

odnosno u z -domenu

$$U_c(z) = -\frac{z}{z-1}G(z). \quad (9.36)$$

Relacije (9.35) i (9.36) jasno ukazuju da se dodavanjem integralnog djelovanja po signalu klizne promjenljive ekvivalentnom upravljanju ostvaruje estimacija i kompenzacija poremećaja konstantnog tipa u potpunosti, jer ispred djelovanja poremećaja se uvodi integrator. Vremenski promjenjivi poremećaji kompenziraju se utoliko bolje ukoliko je brzina promjene poremećaja manja u odnosu na frekvenciju uzorkovanja diskretnog sistema upravljanja.

Pošto se mjerenjem signala klizne promjenljive mogu dobiti uzorci poremećaja u $k-1$, $k-2$, $k-3$, ... trenutku uzorkovanja, tada se metodom interpolacije mogu dobiti tačne estimacije i nagibnih, paraboličnih, kubnih, ... poremećaja.

S obzirom na probleme stabilnosti, estimatori ovog tipa za poremećaje višeg reda od nagibnog tipa najčešće nisu pogodni. Neka je dat samo model u z -domenu estimatora poremećaja nagibnog tipa

$$U_{c,1} = -\frac{z-1}{(z-1)^2}G(z). \quad (9.37)$$

Estimator (9.37) uspješno je primijenjen u estimaciji i kompenzaciji poremećaja u brzinskom servosistemu [73]. Međutim, na primjer, (9.37) se ne može primijeniti u primjeru 9.1, jer sistem postaje nestabilan.

Treba imati u vidu da ovaj tip kompenzatora poremećaja unosi dodatno integralno djelovanje u regulacionu konturu i time može uticati na stabilnost sistema, posebno primjenom (9.37) kod objekata astatičkog tipa. Ovo je osnovni nedostatak ovog tipa kompenzatora poremećaja. Međutim, njegove prednosti su u unošenju astatizma u sistem, čime se povećava i tačnost praćenja referentnog signala.

U prisustvu nemodeliranih dinamika, smanjenjem pojačanja kompenzatora poremećaja može se postići zadovoljavajuće kompenziranje poremećaja i eliminacija ili smanjenje amplitude parazitnih oscilacija u sistemu, što nije moguće u sistemu s estimatorom na osnovu nominalnog modela sistema [130].

Osim toga, ovaj estimator se može koristiti u kombinaciji s Luenbergerovim estimatorom i estimatorom na osnovu nominalnog diskretnog modela objekta u cilju postizanja boljih osobina sistema.

U naučnom radu [74], u kome se sinteza kliznog upravljanja vrši na osnovu Gaove metode zakona dosezanja [50], predložena je takođe estimacija poremećaja na osnovu klizne promjenljive.

Polazeći od modela sistema (9.2) i zakona dosezanja datog relacijom

$$g(k+1) = (1 - qT)g(k) - \varepsilon T \text{sign}(g(k)) + \mathbf{c}_d \mathbf{b}_d d(k) + u_c(k), \quad (9.38)$$

$$u_c(k) = - \sum_{i=0}^k (g_i - (1 - qT)g_{i-1} - \varepsilon T \text{sign}(g_{i-1})), \quad (9.39)$$

gdje vrijedi $q > 0$, $0 < (1 - qT) < 1$ i $\varepsilon > 0$.

Pretpostavljajući da vrijedi

$$\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d (d(k) - d(k-1)) = \delta(k), \quad |\delta(k)| \leq \Delta \leq \varepsilon T, \quad \Delta \in \mathbb{R}^+, \quad (9.40)$$

i pokazujući da je $\mathbf{c}_d d(k-1) = u_c(k)$ dobija se zakon upravljanja u obliku

$$u(k) = -(\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d)^{-1} [\mathbf{c}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) - (1 - qT)g(k) + \varepsilon T \text{sign}(g(k)) + u_c(k)]. \quad (9.41)$$

S obzirom na to da $u_c(k)$ nastaje sumiranjem naznačenih uzoraka, ovaj estimator je, takođe, zasnovan na integralu klizne promjenljive, koja u ovom slučaju nije glatka već cik-cak funkcija što je karakteristično za Gao pristup organizacije KR. Osim toga, uslov $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d (d(k) - d(k-1)) = \delta(k)$, $|\delta(k)| \leq \Delta \leq \varepsilon T$, je dosta ograničavajući u pogledu brzine promjene poremećaja.

Primjer 9.5

Objekat upravljanja je opisan modelom

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_2 + bu + w,$$

gdje su $a = -144$, $b = 6$ i $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 2]^\top$, a poremećaj je dat izrazom

$$w(t) = h(t-10) + h(t-30) \sin(0.1\pi t) + h(t-60) \sin(0.5\pi t).$$

Projektovati upravljački sistem primjenom: (i) metode ekvivalentnog upravljanja [47] i (ii) metode zakona dosezanja [50], tako da dinamika sistema bude određena spektrom polova u diskretnom domenu $z_d = \{0, 0,999\}$. Period uzorkovanja je $T = 1\text{ ms}$. Primijeniti na sistem metode estimacije poremećaja na osnovu klizne promjenljive i izvršiti njihovo međusobno poređenje.

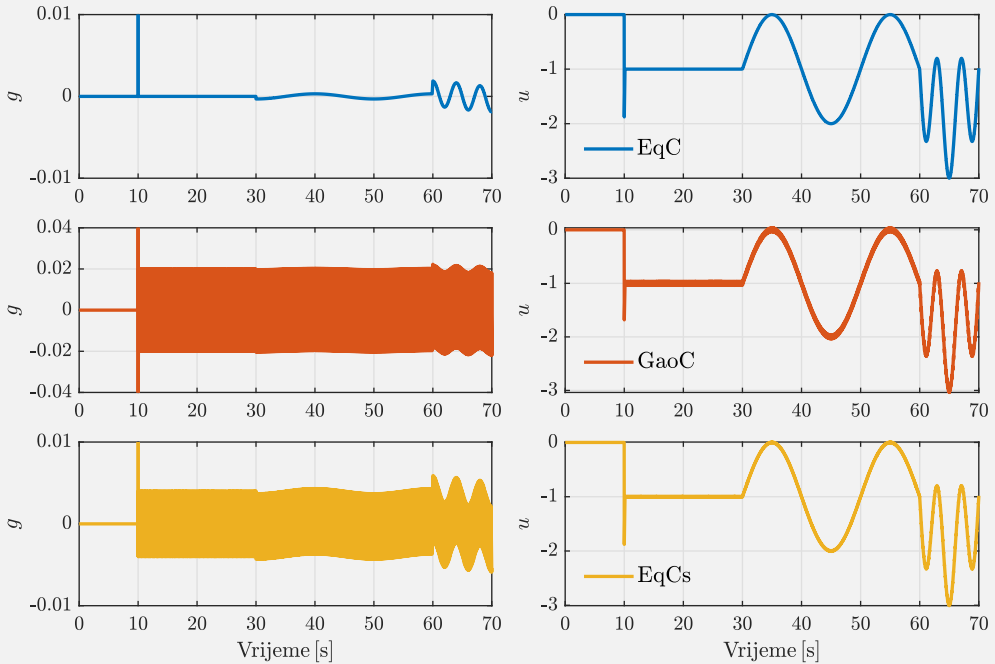
Za **metod ekvivalentnog upravljanja**, klizna promjenljiva i ekvivalentno upravljanje su definisani preko:

$$\mathbf{c}_d = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 17,895 & 1,780 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{eq} = \mathbf{c}_d \mathbf{A}_d = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 17,895 & 1,558 \end{bmatrix},$$

pri čemu vrijedi $\mathbf{c}_d \mathbf{b}_d = 1$.

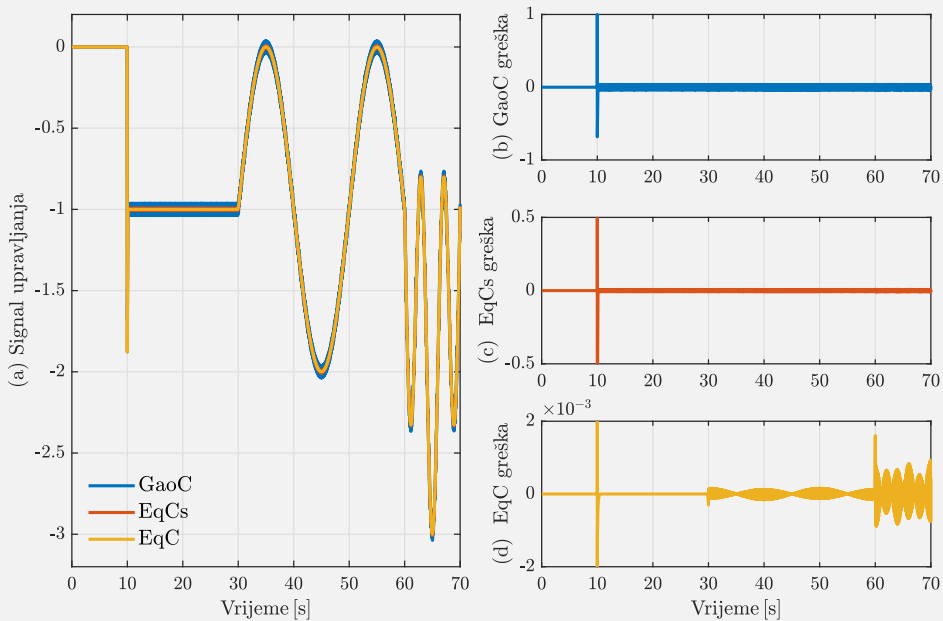
Klizna promjenljiva i ekvivalentno upravljanje su definisani kao $g(k) = \mathbf{c}_d \mathbf{x}(k)$ i $u(k) = -\mathbf{k}_{eq} \mathbf{x}(k)$. Estimacija poremećaja se ostvaruje na osnovu integrala klizne promjenljive. Rezultati simulacije su dati na slikama 9.9, 9.10 i 9.11 (signali označeni s EqC).



Slika 9.9. Signali klizne promjenljive i upravljanja

Kod **metoda Gaova zakona dosezanja**, koristeći parametre klizne promjenljive i ekvivalentnog upravljanja za prethodni tip upravljanja, upravljanje objektom je definisano zakonom dosezanja (9.38) i (9.39). Uzimajući u obzir da je najintenzivnija promjena poremećaja u njegovoj trećoj komponenti koja iznosi $\delta = 0,288$, izabrano je $\varepsilon = 300$ i $q = 20$.

Na slikama 9.9, 9.10 i 9.11 su prikazani rezultati simulacije sistema ovog tipa (signali su označeni *GaoC*).



Slika 9.10. Signali upravljanja i greške između poremećaja i njegove estimirane vrijednosti

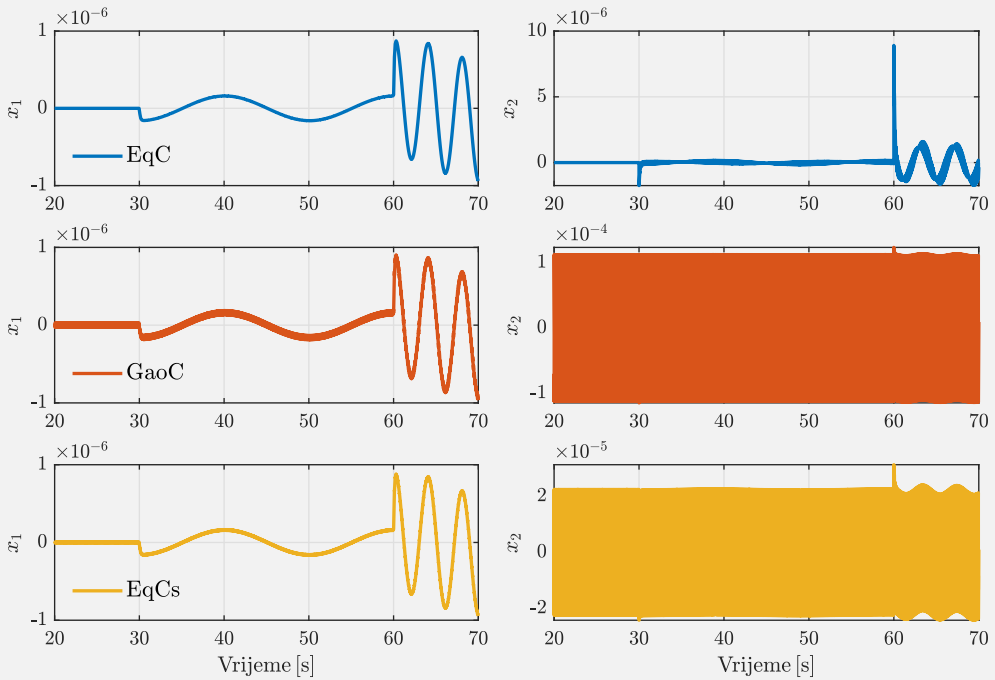
Osnovna razlika između dva navedena pristupa projektovanja upravljanja je u tome da su u sistemu s drugim tipom regulatora na osnovu Gao metode javlja cik-cak režim kretanja i treperenje u kliznoj funkciji, što nije slučaj kod primjene regulatora projektovanog na osnovu metode ekvivalentnog upravljanja.

S obzirom na teorijski postulat da KR ne postoji bez prekidnog upravljanja, u trećem eksperimentu za sistem s regulatorom projektovanim na osnovu metode ekvivalentnog upravljanja dodan je prekidački dio $\varepsilon T \text{sign}(g)$. Naime, diskretni algoritam omogućava dosezanje u nominalnim uslovima, a primijenjeni estimator poremećaja (ovdje je upotrebljen integral klizne promjenljive, ali

isti rezultati se dobijaju i primjenom estimatora na osnovu modela sistema) omogućava kretanje u bliskoj okolini klizne promjenljive.

Dodavanjem prekidačke komponente upravljanja, ostvaruje se formalno zahtijevano teorijsko klizanje. Simulacijski rezultati za ovakav tip regulatora na slikama 9.9, 9.10 i 9.11 su označeni s *EqCs*.

Na osnovu rezultata u ovim eksperimentima, vidi se da sistem projektovan na osnovu metode ekvivalentnog upravljanja s estimatorom poremećaja u datim uslovima (bez nemodelirane dinamike) generiše signal upravljanja bez treperenja i svi relevantni signali sistema su bez treperenja.

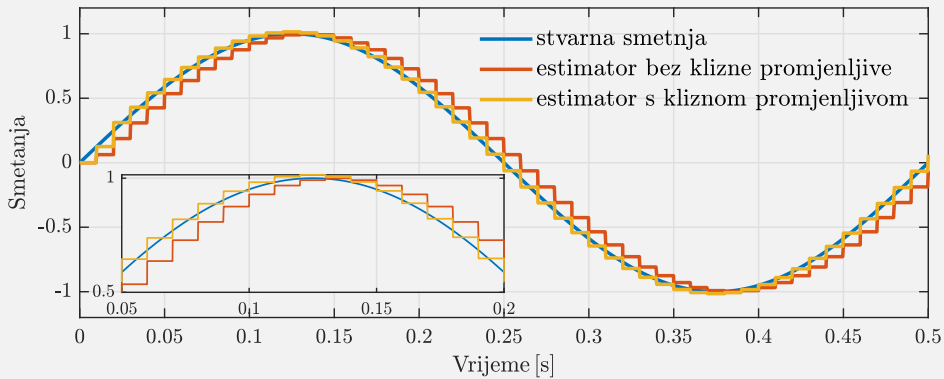


Slika 9.11. Signali greške stanja u odnosu na ravnotežno stanje

Sistem projektovan na osnovu Gaove metode doseganja s estimatorom poremećaja ima treperenje u signalu upravljanja i posljedično tome i u ostalim signalima sistema, što je posebno izraženo u koordinati stanja x_2 . Što se tiče koordinate stanja x_1 , koja je obično i upravljana promjenljiva, oba sistema daju uporedive rezultate. U zaključku ovog dijela treba istaći da se estimator na osnovu integrala klizne promjenljive jednostavno kombinuje s drugim tipovima

estimatora poremećaja, čime se postižu bolje estimacije, pod uslovom da se ne remeti potreban stepen stabilnosti sistema. Tako se, na primjer, primjenjujući estimator na osnovu integrala klizne funkcije i sistem projektovan Gaovom metodom dosezanja s desetostruko manjom vrijednošću ε , dobijaju se odzivi sistemi sa zanemarljivo malim treperenjem u upravljačkom signalu.

Interesantna je i kombinacija estimatora na osnovu klizne promjenljive i Luenbergerovog estimatora poremećaja. Unošenjem estimatora (9.36) paralelno $W_k(z)$ na slici 9.1, ostvaruje se veoma kvalitetno praćenje, odnosno estimacija poremećaja. Na slici 9.12 prikazani su uporedni rezultati sa slike 9.2 gdje je primijenjen Luenbergov estimator s KR, dok je regulator projektovan po metodi ekvivalentnog upravljanja sa $W_k = 1/T$ kome je paralelno dodat estimator na bazi klizne promjenljive (9.36).



Slika 9.12. Poređenje estimacije poremećaja Luenbergovim estimatorom bez i sa estimatora po integralu klizne promjenljive

Na kraju treba istaći da estimatori poremećaja na bazi klizne promjenljive, u sistemima s ograničenim upravljačkim ulazom u objekat, mogu izazvati velike preskoke upravljane veličine te čak dovesti do oscilacija i nestabilnosti u sistemu. Taj problem je poznat iz klasične teorije upravljanja. Zbog toga se moraju primjenjivati neke od tehnika sprečavanja problema integralnog zamaha (eng. *Anti-Windup Problem*). S obzirom na to da su SUPS s velikim pojačanjem, ovaj problem je veoma izražen. Preporučuje se da se estimator aktivira u bliskoj okolini ravnotežnog stanja sistema [126]. Jedan od najprostijih načina rješavanja ovog problema je primjena algoritma (8.66) s aktivacijom estimator poremećaja u trenutku kada je $\psi(k) = \frac{1}{T}g(k)$.

9.5. Aktivni estimator poremećaja

U odjeljku 9.1 na slici 9.3, prikazana je jedna od mogućih konfiguracija estimatora poremećaja. Na osnovu (9.6) zaključeno je da ako prenosna funkcija korekcionog elementa $W_k(z)$ je inverzna prenosna funkcija objekta upravljanja, onda takav estimator/kompenzator u potpunosti estimira/kompenzuje sve poremećaje (vanjske i odstupanja parametara objekta). Međutim, osnovni problem se sastoji u tome što su inverzne prenosne funkcije objekata upravljanja nekauzalne i ne mogu se praktično realizovati. Isti problem se javlja i u konfiguraciji estimatora poremećaja kod koga se upoređuje direktni signal upravljanja i izlaz iz serijske veze objekta upravljanja i elementa s inverznom prenosnom funkcijom nominalnog objekta. U tom slučaju, problem se rješava primjenom tzv. Q-filtera. Osim toga, taj problem se može riješiti i primjenom dodatnog upravljačkog podsistema. Zbog toga se ovi tipovi estimatora mogu nazvati aktivnim estimatorima.

Kod konfiguracije na slici 9.3 u naučnim radovima [122–124] je predloženo rješenje kako ostvariti što bolju realizaciju inverzne prenosne funkcije objekta bez problema kauzalnosti. Naime, posmatrajući strukturu Luenbergerovog opservera na slici 9.1 i nalazeći ekvivalentnu prenosnu funkciju $\frac{\hat{F}(z)}{Y_o(z)}$ za $u = 0$, dobija se

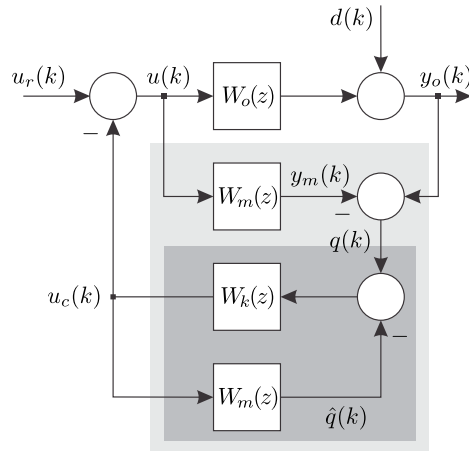
$$\frac{\hat{F}(z)}{Y_o(z)} = \frac{W_k(z)}{1 + W_k(z)W_m(z)} \xrightarrow{|W_k(z)| \rightarrow \infty} \frac{1}{W_m(z)}. \quad (9.42)$$

S obzirom na to da je $W_m = W_o$, to znači da strukturu na slici 9.1, odnosno na slici 9.3, treba modifikovati kao što je pokazano na slici 9.13. Kako je pokazano u [124], logika je vrlo jednostavna. Ako sistem u označenom pravougaoniku ostvaruje idealno praćenje njegove reference q ($\hat{q} = q$) onda je $U_c(z) = W_m^{-1}(z)Q(z)$, a pošto je $W_m = W_o$, tada je $U_c(z) = W_o^{-1}(z)Q(z)$.

Konfiguracija na slici 9.13 je, u suštini, istovjetna s konfiguracijom na slici 9.1 (u z-domenu). Naime, pošto se radi o linearnim konfiguracijama, mogu se, kao što je već pokazano na primjeru opservera datog na slici 9.1, određivati uticaji ulaza estimatora $u(k)$ i $y_o(k)$ na njegov izlaz $u_c(k)$ posebno. Sa slike 9.13 se lahko nalazi

$$\frac{U_c(z)}{Y_o(z)} = \frac{W_k(z)}{1 + W_k(z)W_m(z)}, \quad (9.43)$$

$$\frac{U_c(z)}{U(z)} = \frac{W_k(z)W_m(z)}{1 + W_k(z)W_m(z)}. \quad (9.44)$$



Slika 9.13. Aktivni estimator poremećaja

Isti izrazi se dobijaju i za estimator na slici 9.1.

Primjer 9.6

Neka je objekat upravljanja kao u primjeru 9.1:

$$W_o(z) = W_m(z) = \frac{T}{z-1}, \quad W_k(z) = \frac{1}{T}.$$

U osnovi, cijeli problem se svodi na zahtjev da prenosna funkcija $W_k(z)$ ima veliko pojačanje, a upravljački podsistem $W_k(z)W_m(z)$ obezbjeđuje perfektno praćenje svog referentnog signala. To se najbolje može postići primjenom sistema s velikim (beskonačnim) pojačanjem. Takvi sistemi su sistemi s promjenljivom strukturom s kliznim radnim režimom. Osim toga, dodavanjem takvom sistemu estimatora poremećaja na osnovu klizne promjenljive, paralelno elementu $W_k(z)$, postižu se veoma značajna poboljšanja u praćenju referenci što je primijenjeno u naučnom radu [71].

Poseban problem može nastati ako objekat upravljanja ima nestabilne modove. U disertaciji [124] je analiziran taj problem i navedeno adekvatno rješenje.

★ ★ ★ ★ ★

10. Diskretni KR u linearnim sistemima s više ulaza

U odjeljku 6.2.2 naglašeno je da je organizacija KR u dinamičkim sistemima upravljanja s više ulaza znatno složenija nego u slučaju sistema s jednim ulazom. Isto vrijedi i za organizaciju diskretnih KR kod kojih postoji nekoliko faktora koje otežavaju projektovanje i implementaciju ove upravljačke metodologije na dinamičke sisteme upravljanja s više ulaza.

Važna osobina KRVR je smanjenje treperenja i snižavanje reda dinamike sistema za broj koji je veći od broja ulaza. Ova činjenica je iskorištena u naučnom radu [105] gdje je u vremenski kontinualnom sistemu upravljanja s više ulaza ostvaren nulti red dinamike sistema. Na ovaj način je obezbjeđeno konačno vrijeme dolaska sistema u ravnotežno stanje za tradicionalne linearne klizne površi, što nije moguće postići konvencionalnim KR. Zbog problema spregnutosti kliznih promjenljivih u sistemima s više ulaza, u naučnom radu [27] je predloženo raspredanje upravljačkih komponenti odgovarajućim transformacionim tehnikama koje elegantno rješava ovaj problem.

Upravo ova dva rada su bila podsticaj da se u naučnim radovima [66–68] ponude rješenja za projektovanje SUPS u vremenski diskretnom domenu za sisteme s više ulaza. Zajednička ideja radova je da ostvari raspredanje upravljačkih komponenti sistema s više ulaza i mogućnost proizvoljnog izbora reda dinamike sistema u diskretnom KR. Vrlo važna osobina koje je istaknuta jeste da konačno vrijeme dosezanja klizne promjenljive i uspostava željene dinamike u diskretnom KR ima osobine *dead-beat* upravljanja.

Posmatra se linearni viševarijabilni dinamički sistem oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t)), \quad (10.1)$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja, a $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ vektor poremećaja koji djeluje u prostoru upravljanja. Matrice sistema $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su konstantne i

imaju odgovarajuće dimenzije. Neka je sistem (10.1) kompletno kontrolabilan i neka je matrica $\mathbf{B}$ punog ranga $\text{rang}\{\mathbf{B}\} = m$. Vektor poremećaja $\mathbf{d}(t)$ sadrži efekte neodređenosti parametara sistema i vanjskog poremećaja, te se može opisati kao

$$\mathbf{B}\mathbf{d}(t) = \Delta\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{f}(t), \quad (10.2)$$

gdje su $\mathbf{f}(t)$ vanjski poremećaj, a $\Delta\mathbf{A}$ i $\Delta\mathbf{B}$ neodređenosti i/ili perturbacije parametara matrica sistema i ulaza, respektivno. Uslovi invarijantnosti na parametarske poremećaje su zadovoljeni ukoliko važi da je $\text{rang}\{[\mathbf{B} \ \Delta\mathbf{A} \ \Delta\mathbf{B}]\} = \text{rang} \mathbf{B} = m$.

Vremensko-diskretni model sistema u prostoru stanja se dobija uz standardnu pretpostavku da se vektor upravljanja ne mijenja između trenutaka uzorkovanja, tj. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, $kT \leq t < kT + T$, gdje je T period uzorkovanja sistema. Diskretni model sistema (10.1) je oblika

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d(\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k)), \quad (10.3)$$

gdje $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ i $\mathbf{d}(k)$ označavaju vrijednosti vektora stanja, upravljanja i poremećaja u trenucima uzorkovanja $t = kT$, respektivno. Matrice diskretnog sistema (10.3) se nalaze kao $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}$ i $\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau$ i zavise od perioda uzorkovanja.

Pod pretpostavkom da je period uzorkovanja dosta mali, te da se vektor poremećaja može smatrati skoro konstantnim između trenutaka uzorkovanja, osobina invarijantnosti na poremećaje se zadržava i nakon diskretizacije sistema, što je usvojeno u izvođenju modela (10.3). Takođe, ukoliko je period uzorkovanja zadovoljavajući [131], sistem (10.3) nakon diskretizacije ostaje kontrolabilan, ukoliko je kontinualni sistem (10.1) kontrolabilan. Matrica kontrolabilnosti diskretnog sistema (10.3) je definisana kao

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B}_d \ \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d \ \cdots \ \mathbf{A}_d^{n-1}\mathbf{B}_d]. \quad (10.4)$$

Rasprezanje sistema n -tog reda s obzirom na upravljački ulaz se može postići dekompozicijom sistema u podsisteme s jednim ulazom. Za ovu namjenu se koriste indeksi kontrolabilnosti, koji su uvedeni u odjeljku 6.2.2. Za diskretni sistem redukovana matrica kontrolabilnosti $\mathbf{C}_n$ se formira u obliku

$$\mathbf{C}_n = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{A}_d\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{A}_d^{r_1-1}\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_m \ \mathbf{A}_d\mathbf{b}_m \ \cdots \ \mathbf{A}_d^{r_m-1}\mathbf{b}_m], \quad (10.5)$$

gdje je $\mathbf{b}_i$ ($i = 1, \dots, m$) i -ta kolona matrice $\mathbf{B}_d$.

U matrici (10.5), cjelobrojne vrijednosti r_i ($i = 1, \dots, m$) predstavljaju indekse kontrolabilnosti, pri čemu se svaki indeks r_i odnosi na i -tu kolonu matrice $\mathbf{B}_d$ i određuje iz (10.5). U [111], pokazano je da vrijedi $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Kako je intencija da se u rješavanju upravljačkog zadatka koriste KRVR, treba se podsjetiti da u sistemima s jednim ulazom organizacija KR višeg reda daje zahtjev da je relativni red sistema jednak redu KR. U tom svjetlu, ideja je da se u proceduri dekompozicije sistema uvedu pomoćne promjenljive čiji su relativni redovi jednaki indeksima kontrolabilnosti.

Naime, neka se za sistem (10.3) definišu pomoćne promjenljive $g_i(k)$ ($i = 1, \dots, m$), pri čemu svaka promjenljiva odgovara jednoj upravljačkoj komponenti. Ove promjenljive obrazuju vektor $\mathbf{g}(k) = [g_1(k) \ \cdots \ g_m(k)]$, koji se definiše kao

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10.6)$$

Predložena procedura zahtijeva da pomoćna promjenljiva $g_i(k)$ ima relativni red koji je jednak odgovarajućem indeksu kontrolabilnosti r_i ($i = 1, \dots, m$).

Dakle, nakon nalaženja skupa indeksa kontrolabilnosti sistema, potrebno je pronaći matricu $\mathbf{C}_d$ koja obezbjeđuje zahtijevane relativne redove pomoćnih promjenljivih. Jedno od rješenja za matricu $\mathbf{C}_d$ je dato u naučnom radu [68] koje će ovdje biti predstavljeno.

Za posmatrani sistem (10.3) s indeksima kontrolabilnosti r_i ($i = 1, \dots, m$), pomoćne promjenljive $g_i(k)$ imaju relativne redove koji su jednaki indeksima kontrolabilnosti ako se matrica $\mathbf{C}_d$ izabere u obliku

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ 1] \mathbf{C}_i^\dagger, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (10.7)$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{B}_d \ \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \ \cdots \ \mathbf{A}_d^{r_i-2} \mathbf{B}_d \ \mathbf{A}_d^{r_i-1} \mathbf{B}_d], \quad (10.8)$$

gdje operator $\dagger$ označava desnu pseudoinverziju matrice, a matrica $\mathbf{B}_{di}$ je dio matrice $\mathbf{B}_d$ koji je definisan kao $\mathbf{B}_{di} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_i]$, $i \leq m$.

Za izabrano $\mathbf{C}_d$ u skladu sa (10.7) i (10.8), dinamika pomoćnih promjenljivih se može opisati razvojem

$$g_i(k+j) = \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^j \mathbf{x}(k), \quad (j = 0, 1, \dots, r_i - 1), \quad (10.9)$$

$$g_i(k + r_i) = \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^{r_i} \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^{r_i-1} \mathbf{B}_d (\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.10)$$

Iz posljednjih jednačina se vidi da je ostvareni relativni red pomoćne promjenljive g_i jednak indeksu kontrolabilnosti r_i . Grupisanjem svih m pomoćnih promjenljivih (10.10) u vektor, dobija se jednačina

$$\begin{bmatrix} g_1(k + r_1) \\ g_2(k + r_2) \\ \vdots \\ g_m(k + r_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{r_1} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{r_m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{r_1-1} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{r_2-1} \mathbf{B}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{r_m-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} (\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.11)$$

U [68] je pokazano da iz (10.11) kvadratna matrica $\mathbf{W}_d$ definisana kao

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{r_1-1} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{r_2-1} \mathbf{B}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{r_m-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

je gornjo-trougaona matrica sa svim jedinicama na glavnoj dijagonali, tako da vrijedi $\det \{\mathbf{W}_d\} = 1$ ako je $\mathbf{C}_d$ izabrana u skladu sa (10.7) i (10.8). Samim tim je $\mathbf{W}_d$ regularna matrica i ima svoju inverziju. Iz (10.11) slijedi da se upravljanjem oblika $\mathbf{u}(k) = \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{u}'(k)$ postiže da upravljačka komponenta u'_i od vektora upravljanja $\mathbf{u}'(k)$ utiče isključivo samo na svoju pomoćnu promjenljivu g_i . To znači da je diskretni sistem (10.3) adekvatnim izborom pomoćnih promjenljivih (10.6)–(10.8) transformisan u sistem definisan sa (10.9) i (10.10), kod koga je ostvareno raspregnuto upravljanje. Svaki podsistem je opisan dinamikom r_i -tog reda.

Nakon raspregzanja, u svakom od podsistema moguće je projektovati i organizovati željeni KR višeg reda koristeći algoritme koji su razvijeni za sisteme s jednim ulazom.

Ukoliko se u i -tom podsistemu organizuje KR q_i -tog reda, rezultujuća dinamika podsistema u KR je $(r_i - q_i) = N_i$ -tog reda. Red dinamike cjelokupnog sistema se onda može iskazati kao

$$N = \sum_{i=1}^m N_i = \sum_{i=1}^m (r_i - q_i) = n - \sum_{i=1}^m q_i. \quad (10.13)$$

Iz relacije (10.13) se može vidjeti da se red dinamike kompletnog sistema može proizvoljno podešavati adekvatnim izborom reda KRVR u svakom od podsistema, pri čemu mora da važi $1 \leq q_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, m$. U slučaju konvencionalnih KR u podsistemima, $q_i = 1$ pa iz (10.13) slijedi $N = n - m$, što je dobro poznat teorijski rezultat. Dakle, na osnovu (10.13) se može zaključiti da je ovim pristupom moguće ostvariti dinamiku sistema u KR čiji je red manji od $n - m$.

Po ugledu na KR u kontinualnim sistemima, KR q_i -tog reda u i -tom podsistemu se definiše kao kretanje pri kome klizna promjenljiva s_i ispunjava sljedeći zahtjev

$$s_i(k) = s_i(k+1) = \dots = s_i(k+q_i-1) = 0, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10.14)$$

Potreban uslov da bi se ostvarilo željeno kretanje (10.14) je da je relativni red klizne promjenljive s_i u odnosu na upravljanje jednak q_i .

10.1. Realizacija upravljanja s konačnim vremenom smirivanja primjenom KRVR

Ukoliko je red KR višeg reda u svakom od podsistema jednak pripadajućem indeksu kontrolabilnosti, tj. $q_i = r_i$ ($i = 1, \dots, m$), iz (10.13) se dobija $N = 0$. To znači da je rezultujuća dinamika sistema nultog reda, odnosno da su sve sopstvene vrijednosti (polovi) sistema jednake nuli. Ova situacija u diskretnim sistemima upravljanja je poznata da obezbjeđuje dolazak sistema u ravnotežno stanje za konačno vrijeme i to za minimalan broj perioda uzorkovanja. Upravljanje koje ostvaruje ovo kretanje se naziva upravljanje s konačnim vremenom smirivanja ili *dead-beat* upravljanje [132].

Postoji dosta radova u literaturi koji se odnose na *dead-beat* upravljanje. Većina njih posmatra sisteme s jednim ulazom i koristi polinomijalni pristup u projektovanju *dead-beat* regulatora. Međutim, u slučaju sistema s više ulaza, projektovanje upravljanja nije tako jednostavno. Mogu se uglavnom izdvojiti tri pristupa u projektovanju *dead-beat* upravljanja za sisteme s više ulaza: metoda podešavanja polova sistema [133, 134], pristup linearnog kvadratnog regulatora [135, 136] i *dead-beat* upravljanje bez riplova [137, 138]. Iako je *dead-beat* upravljanje veoma atraktivna upravljačka metoda, ima dva značajna nedostatka. Često zahtijeva upravljačke signale velikih amplituda koje nisu prihvatljive i/ili ostvarljive, kao i osjetljivost na vanjske i parametarske poremećaje.

Prvi nedostatak nastaje iz zahtjeva da sistem iz početnog stanja za kratko vrijeme (svega nekoliko perioda uzorkovanja) dođe u koordinatni početak. Ovaj problem se rješava povećanjem perioda uzorkovanja upravljačkog sistema, čime se mogu ograničiti amplitude upravljačkih signala. Međutim, s većim periodom uzorkovanja povećavaju se efekti djelovanja poremećaja na sistem. Kako se idealno ponašanje ostvaruje samo u nominalnom sistemu bez poremećaja, neophodno je da upravljački sistem što bolje kompenzuje poremećaja.

U cilju rješavanja ova dva kontradiktorna zahtjeva nameće se rješenje kroz primjenu višestruke diskretizacije u sistemu [139]. Veći period uzorkovanja se koristi za generisanje *dead-beat* upravljanja, dok se značajnije manji period uzorkovanja koristi za estimaciju i kompenzaciju poremećaja u sistemu.

Koristeći opisani pristup, ostvarivanje *dead-beat* odziva primjenom KR višeg reda u sistemu (10.3), odnosno u raspregnutim podsistemima (10.9) i (10.10), razmatraće se za slučaj nominalnog sistema, tj. kada je $\mathbf{d}(k) = \mathbf{0}$, $\forall k$. Kako je zahtjev da relativni red klizne promjenljive bude jednak q_i , a za *dead-beat* odziv važi $q_i = r_i$, klizne promjenljive moraju biti relativnog reda r_i . Treba podsjetiti da komponente pomoćne promjenljive (10.6), pod uslovima (10.7) i (10.8), upravo posjeduju tražene relativne redove. Odavde se može zaključiti, da u ovom slučaju klizne promjenljive se mogu poistovjetiti s pomoćnim promjenljivim, tj. $\mathbf{s}(k) = \mathbf{g}(k)$, $(s_i(k) = g_i(k), i = 1, \dots, m)$. Dakle, u daljoj analizi kreće se od sljedećeg modela sistema

$$g_i(k+j) = \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^j \mathbf{x}(k), \quad (j = 0, 1, \dots, r_i - 1), \quad (10.15)$$

$$g_i(k+r_i) = \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^{r_i} \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^{r_i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k). \quad (10.16)$$

Sagledavajući svih m kliznih promjenljivih, (10.16) se može napisati u matričnoj formi

$$\begin{bmatrix} g_1(k+r_1) \\ g_2(k+r_2) \\ \vdots \\ g_m(k+r_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{r_1} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{r_m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{r_1-1} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{r_2-1} \mathbf{B}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{r_m-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) = \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{W}_d \mathbf{u}(k). \quad (10.17)$$

Već je pokazano da će postojati matrica $\mathbf{W}_d^{-1}$, ukoliko se $\mathbf{C}_d$ izračuna na osnovu (10.7) i (10.8). Očigledno je onda da se za upravljanje

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{W}_d^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (10.18)$$

anulira desna strana (10.17) i dobija se

$$\begin{bmatrix} g_1(k+r_1) \\ g_2(k+r_2) \\ \vdots \\ g_m(k+r_m) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (10.19)$$

Ovo pokazuje da će sve klizne promjenljive postati jednake nuli za najviše $\rho = \max_i \{r_i\}$ perioda uzorkovanja.

Zamjenom upravljanja (10.18) u polazni sistem (10.3) pri $\mathbf{d}(k) = \mathbf{0}$, $\forall k$, dobija se

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d\mathbf{K})\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_e\mathbf{x}(k). \quad (10.20)$$

Iterativnim razvojem (10.20) dobija se jednačina

$$\mathbf{x}(k+\rho) = \mathbf{A}_e^\rho\mathbf{x}(k). \quad (10.21)$$

U naučnom radu [66] je pokazano da je $\mathbf{A}_e$ nilpotentna matrica s stepenom nilpotentnosti $\rho = \max_i \{r_i\}$, što znači da će važiti $\mathbf{A}_e^\rho = \mathbf{0}$.

Ovo ukazuje da će upravljanje (10.18) u nominalnom sistemu (10.3) ostvariti *dead-beat* odziv, odnosno da će stanje sistema iz bilo kojeg početnog stanja za vrijeme ρT dovesti sistem u koordinatni početak.

Treba istaći da će odziv realnog sistema s upravljanjem (10.18) odgovarati teorijski dobijenom *dead-beat* odzivu (10.21) u mjeri u kojoj realni model sistema odgovara nominalnom modelu, na osnovu koga je i projektovano upravljanje. Dakle, neophodno je izvršiti kompenzaciju poremećaja u sistemu sa ciljem da se dobije što približnije ponašanje nominalnom sistemu.

10.1.1. Kompenzacija poremećaja korištenjem nominalnog modela sistema

Očigledno je da *dead-beat* upravljanje (10.18) ne utiče na slabljenje djelovanja poremećaja u sistemu. U naučnom radu [66] je poboljšana robusnost sistema, tako što se *dead-beat* upravljanju pridodaje kompenzaciono upravljanje formirano u opserveru poremećaja, sa ciljem ostvarenja što bolje kompenzacije poremećaja u sistemu. Kompenzacione tehnike opisane u poglavlju 9 su pogodne za primjenu u kombinaciji s projektovanim *dead-beat* upravljanjem. Neka je period uzorkovanja opservera poremećaja T_o određen relacijom $T = hT_o$, gdje je h neka pozitivna cjelobrojna vrijednost veća od jedan. Ovim je definisan odnos perioda uzorkovanja upravljačkog i kompenzacionog dijela sistema. Period uzorkovanja T_o treba odrediti dovoljno mali tako da se poremećaj može smatrati skoro konstantnim između dva uzastopna trenutka uzorkovanja u kompenzacionom sistemu.

Diskretizacija sistema (10.1) periodom T_o uz pomenute pretpostavke daje model

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_o (\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k)), \quad (10.22)$$

gdje se matrice diskretnog sistema nalaze kao $\mathbf{A}_o = e^{\mathbf{A}T_o}$ i $\mathbf{B}_o = \int_0^{T_o} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} dt$, a promjenljive $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ i $\mathbf{d}(k)$ su uzorkovane u trenucima $t = kT_o$. Upravljanje koje djeluje na sistem (10.22) je sada kombinacija *dead-beat* upravljanja (10.18) i kompenzacionog upravljanja $\mathbf{u}_o(k)$, pa se može pisati

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x} \left(\left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor \right) + \mathbf{u}_o(k), \quad (10.23)$$

gdje $\left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor$ označava zaokruživanje $\frac{k}{h}$ na najbližu cjelobrojnu vrijednost koja je manja ili jednaka $\frac{k}{h}$. Ova notacija je upotrijebljena da bi se implementirao pristup višestruke diskretizacije u sistemu. Primjenom upravljanja (10.23) u sistemu (10.22), dinamika sistema postaje

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}_o \mathbf{K} \mathbf{x} \left(\left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor \right) + \mathbf{B}_o (\mathbf{u}_o(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.24)$$

Model nominalnog sistema (10.3) za period uzorkovanja T_o je opisan jednačinom

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{B}_o \mathbf{K} \mathbf{x}_m \left(\left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor \right). \quad (10.25)$$

Cilj upravljanja je natjerati stanje perturbovanog sistema (10.24) da prati stanje nominalnog modela (10.25). U tu svrhu formira se greška praćenja $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{x}(k)$. Korištenjem (10.25) i (10.24) dolazi se do njene dinamike

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k) - \mathbf{B}_o (\mathbf{u}_o(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.26)$$

Sada je potrebno odrediti kompenzaciono upravljanje $\mathbf{u}_o(k)$ koje će učiniti grešku što manjom. Za to se može upotrijebiti metoda diskretnog ekvivalentnog upravljanja u klasičnom KR. Najprije je potrebno definisati vektor klizne promjenljive u kompenzacionom sistemu

$$\boldsymbol{\sigma}(k) = \mathbf{C}_o \mathbf{e}(k), \quad \boldsymbol{\sigma}(k) = \begin{bmatrix} \sigma_1(k) \\ \vdots \\ \sigma_m(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{o1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{om} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{oi} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10.27)$$

Naredna vrijednost klizne promjenljive se dobija korištenjem (10.27) i (10.26) kao

$$\boldsymbol{\sigma}(k+1) = \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k) - \mathbf{C}_o \mathbf{B}_o (\mathbf{u}_o(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.28)$$

Iz uslova $\boldsymbol{\sigma}(k+1) = \mathbf{0}$ se može naći ekvivalentno upravljanje

$$\mathbf{u}_o(k) = (\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o)^{-1} \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k) - \mathbf{d}(k). \quad (10.29)$$

Vektor upravljanja (10.29) se ne može praktično realizovati budući da trenutna vrijednost poremećaja $\mathbf{d}(k)$ nije poznata. Međutim, ukoliko se $\mathbf{d}(k)$ može dobro estimirati svojom prethodnom vrijednošću $\mathbf{d}(k-1)$, efekti djelovanja poremećaja na sistem se mogu dijelom potisnuti. Na osnovu (10.28) se može pisati

$$\boldsymbol{\sigma}(k) = \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k-1) - \mathbf{C}_o \mathbf{B}_o (\mathbf{u}_o(k-1) + \mathbf{d}(k-1)), \quad (10.30)$$

odakle se može izraziti prethodna vrijednost poremećaja

$$\mathbf{d}(k-1) = (\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o)^{-1} (\mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k-1) - \boldsymbol{\sigma}(k)) - \mathbf{u}_o(k-1). \quad (10.31)$$

Ukoliko je period uzorkovanja T_o izabran u skladu sa zahtjevom da se poremećaj u toku te periode ne mijenja značajno, onda se (10.31) može smatrati dobrom estimacijom poremećaja $\mathbf{d}(k)$.

Dakle, ukoliko se u (10.29), umjesto $\mathbf{d}(k)$, primijeni $\mathbf{d}(k-1)$ iz (10.31), vektor kompenzacijonog upravljanja postaje

$$\mathbf{u}_o(k) = \mathbf{u}_o(k-1) + (\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o)^{-1} (\mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k) - \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k-1) + \boldsymbol{\sigma}(k)). \quad (10.32)$$

Ovo je rekurzivna forma kompenzacijonog upravljanja, čija se inicijalna vrijednost treba postaviti. Uslov $\boldsymbol{\sigma}(k+1) = \mathbf{0}$ se može shvatiti kao *dead-beat* upravljanje klizne promjenljive u jednom koraku.

Zato za inicijalnu vrijednost kompenzacijonog upravljanja se može uzeti upravo ta vrijednost koja je izračunata za nominalni model. Treba naglasiti da će buduća vrijednost vektora klizne promjenljive zavisiti od razlike između stvarne i estimirane vrijednosti vektora poremećaja.

Primjer 10.1

Performanse predstavljenog *dead-beat* upravljanja baziranog na KR višeg reda, uz primjenu kompenzacije poremećaja, biće demonstrirane kroz simulacije. Kao objekat upravljanja biće korišten linearizovani model aviona [140, 66].

Najprije se posmatra kombinacija *dead-beat* upravljanja i kompenzatora poremećaja na bazi nominalnog modela objekta.

Početno stanje sistema je $\mathbf{x}_0 = [10 \quad -5 \quad 0 \quad -10 \quad 5]^\top$. Neka na sistem djeluje vektor poremećaja oblika $\mathbf{d}(t) = [0.5 \sin(\frac{8}{3}\pi t) \quad \mathcal{T}(\pi t) \quad 2h(t-1.5)]^\top$, gdje je $\mathcal{T}(\omega t)$ trougaoni signal ugaone učestanosti ω , a $h(t)$ je jedinična Hevisajdova odskočna funkcija.

Upravljački sistem ima dva perioda uzorkovanja, te se koriste dva diskretna modela sistema. Model $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d)$ se koristi za projektovanje *dead-beat* upravljanja koje radi s periodom $T = 1$ s, dok model $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o)$ služi za kompenzaciju poremećaja koja se radi s periodom $T_o = T/100 = 0.01$ s. Matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{B}_d$ su:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.12 & 1.12 & 0.11 & -0.75 \\ 0 & 0.94 & -0.17 & -0.04 & 0.06 \\ 0 & 0.05 & 1 & 0.58 & -0.28 \\ 0 & 0.11 & -0.01 & 0.20 & -0.39 \\ 0 & -0.16 & 0.02 & 0.41 & 0.26 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} -0.51 & 0.04 & -0.02 \\ -0.13 & 0.97 & 0.02 \\ 1.40 & 0.02 & -0.58 \\ 2.10 & 0.05 & -0.94 \\ 2.31 & -0.10 & -0.54 \end{bmatrix}.$$

Red sistema je $n = 5$, a broj ulaza je $m = 3$.

Diskretni sistem je takođe kontrolabilan s indeksima kontrolabilnosti koji su dati sljedećim vektorom $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Može zaključiti da *dead-beat* odziv ima dva koraka jer je $\rho = \max_i \{\mathbf{r}\} = 2$.

Definišu se tri klizne promjenljive, s odgovarajućim vektorima $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$, čiji relativni redovi treba biti jednaki indeksima kontrolabilnosti.

Vektori se računaju na osnovu sljedećih jednačina:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}^\dagger,$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}_d \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}^\dagger,$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_d^\dagger.$$

Dobijena rješenja sačinjavaju matricu $\mathbf{C}_d$ kao

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.0022 & 0.4763 & -0.2733 & -0.0397 \\ 7.4063 & 0.1895 & -1.6416 & -1.4031 & 3.9168 \\ 0 & 0.3264 & 0 & -2.2326 & 2.0518 \end{bmatrix}.$$

Matrice $\mathbf{W}_d$, $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ se računaju kao

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \\ \mathbf{c}_3 \mathbf{B}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0232 & -0.4481 \\ 0 & 1 & -3.3072 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^2 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^2 \\ \mathbf{c}_3 \mathbf{A}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0536 & 0.4723 & 0.3003 & -0.2240 \\ 7.4063 & 2.0694 & 14.9550 & 3.4838 & -8.8158 \\ 0 & -0.2660 & 0.0000 & 0.3695 & 1.4274 \end{bmatrix},$$

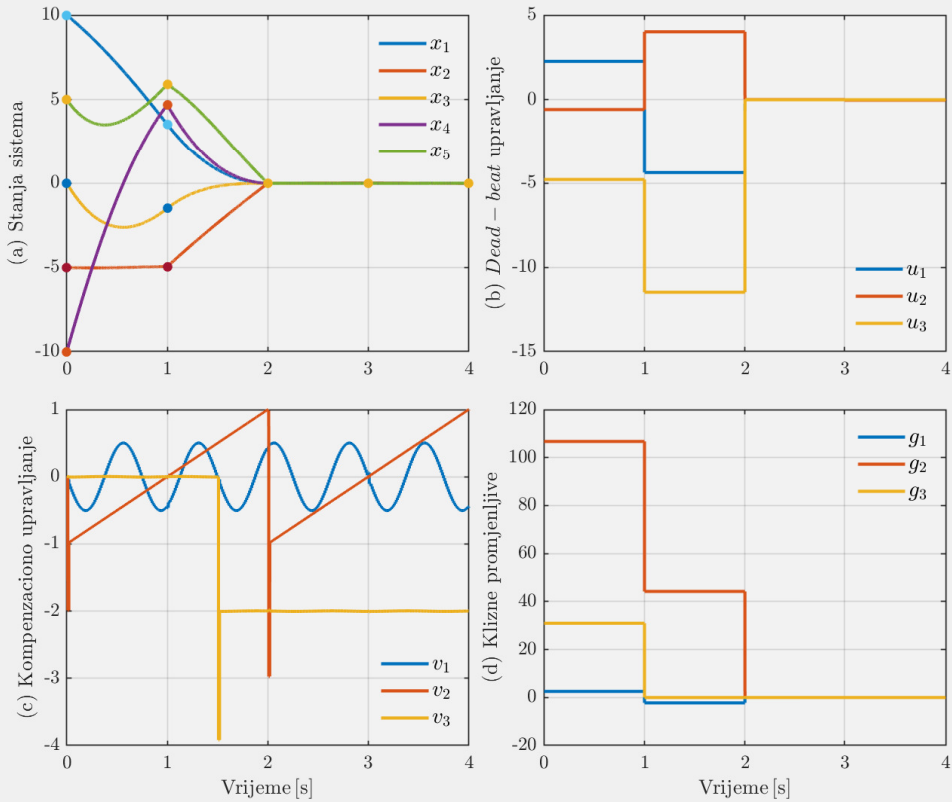
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.1721 & -0.0932 & 0.1249 & 0.3565 & 0.5107 \\ 7.4063 & 1.1895 & 14.9550 & 4.7058 & -4.0952 \\ 0.0000 & -0.2660 & 0.0000 & 0.3695 & 1.4274 \end{bmatrix}.$$

Model (A_o, B_o) koji se koristi za kompenzaciju poremećaja je definisan sa

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 & -0.01 \\ 0 & 1 & -0.002 & 0 & 0.0007 \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0 & 0.99 & -0.01 \\ 0 & -0.003 & 0 & 0.011 & 0.993 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ -0.0012 & 0.01 & 0 \\ 0.0002 & 0 & -0.0001 \\ 0.044 & 0 & -0.0165 \\ 0.016 & 0 & -0.0008 \end{bmatrix}.$$

Iz uslova $C_o B_o = I$ (I je jedinična matrica), matrica C_o se dobija kao

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0.1063 & 0 & -3.58 & 72.6577 \\ 0 & 100.04 & 0 & -0.429 & 8.6836 \\ 0 & 0.2965 & 0 & -69.82 & 192.532 \end{bmatrix}.$$



Slika 10.1. Signali stanja sistema, *dead-beat* upravljanja, kompenzacionog upravljanja i kliznih promjenljive

Simulacioni rezultati ovog sistema, gdje se primjenjuje *dead-beat* upravljanje (10.18) i kompenzaciono upravljanje (10.29), prikazani su na slici 10.1. Simulacioni korak integraljenja je $0.1ms$. Na slikama su linijama prikazane kontinualne promjenljive, dok su uzorkovane vrijednosti označene s $\bullet$.

Slika 10.1(a) prikazuje stanja sistema koja se uspješno dovode u koordinatni početak uprkos poremećajima. Vrijeme smirenja sistema je $2s$. Unutar slike su uvećano prikazana stanja sistema u stacionarnom stanju. Može se vidjeti da je djelovanje poremećaja zanemarljivo.

Dead-beat upravljanje je dato na slici 10.1(b) i uočava se da upravljačka sekvenca ima predviđena dva koraka. Poremećaji su značajno oslabljeni uvođenjem kompenzacionog upravljanja koje predstavlja estimirani poremećaj (slika 10.1(c)).

Klizne promjenljive su prikazane na slici 10.1(d), gdje se vidi da projektovani regulator obezbjeđuje anuliranje ovih promjenljivih u konačnom vremenu.

10.1.2. Kompenzacija poremećaja korištenjem STA

STA je algoritam upravljanja promjenljive strukture koji obezbjeđuje nastanak KR drugog reda i o njemu je bilo riječi u odjeljku 6.1. Inicijalno je razvijen za kontinualne sisteme s jednim ulazom [13, 14, 141]. Odlikuje ga značajna eliminacija treperenja, konačno vrijeme konvergencije sistema i odlična robusnost na poremećaje u sistemu. Zbog svojih dobrih osobina ovaj algoritam je našao primjenu u mnogim aplikacijama i stekao veliku popularnost. Međutim, diskretna implementacija ovog algoritma je još uvijek predmet istraživanja u dosta radova. STA je dobar kandidat za primjenu u opserverima poremećaja.

Novi opserver poremećaja za diskretne sisteme s vektorskim upravljanjem, koji se bazira na STA, je predložen u [67]. U diskretizaciji STA primijenjena je eksplicitna Ojlerova metoda, iako postoje i drugi pristupi [59]. Konvergencija estimirane vrijednosti poremećaja $\hat{\mathbf{d}}(k)$ ka stvarnom poremećaju $\mathbf{d}(k)$ je dokazana korištenjem pristupa pseudo-linearnih sistema [142].

Kako kompenzacionim upravljanjem nije moguće kompletno poništiti djelovanje poremećaja, zadatak je pronaći upravljanje koje će da dovede stanje sistema u predefinisano okolinu koordinatnog početka u prostoru greške (10.26) u kontekstu KR i odgovarajuće klizne promjenljive (10.27). Veličina te okoline bi trebalo da zavisi od parametara upravljačkog algoritma i da bude invarijantna na poremećaj.

Odgovori na ova pitanja su dati u naučnom radu [67], a ovdje će biti predstavljeni bez dokaza.

Kompenzaciono upravljanje $\mathbf{u}_o(k)$, čije su komponente definisane sa

$$u_{o,i}(k) = v_i e_i(k) + \alpha \sqrt{|\sigma_i(k)|} \text{sign}(\sigma_i(k)) - z_i(k), \quad (10.33)$$

$$z_i(k+1) = z_i(k) - T_o \beta \text{sign}(\sigma_i(k)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (10.34)$$

$$\alpha < \sqrt{T_o \beta}, \quad (10.35)$$

gdje je v_i i -ta vrsta matrice $(\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o)^{-1} \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ su neke realne pozitivne konstante, će dovesti kliznu promjenljivu (10.27) za konačno vrijeme u ograničenu okolinu oko koordinatnog početka čija je granica definisana Euklidovom vektorskom normom

$$\|\boldsymbol{\sigma}(k)\| \approx T_o \beta. \quad (10.36)$$

Vektorska forma kompenzacionog upravljanja $\mathbf{u}_o(k)$, čije su komponente opisane sa (10.33) i (10.34), se može bez gubitka opštosti zapisati u obliku

$$\mathbf{u}_o(k) = (\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o)^{-1} \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{e}(k) + \frac{\alpha}{\|\boldsymbol{\sigma}(k)\|^{1/2}} \boldsymbol{\sigma}(k) - \mathbf{z}(k), \quad (10.37)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k) - \frac{T_o \beta}{\|\boldsymbol{\sigma}(k)\|} \boldsymbol{\sigma}(k). \quad (10.38)$$

Na osnovu ovih jednačina se može uočiti da opserver poremećaja posjeduje tri parametra: α , β i T_o . Parametri β i T_o utiču na dimenzije oblasti u kojoj konvergira $\boldsymbol{\sigma}$, a samim tim i greška $\mathbf{e}$. Parametar α utiče na brzinu konvergencije greške. Ovi parametri se mogu izabrati na osnovu relacija (10.35) i (10.36).

Primjer 10.2

U ovom primjeru se ispituje ponašanje sistema kada se *dead-beat* upravljanju dodaje komenzaciono upravljanje bazirano na primjeni STA što je prezentirano u [67].

Nominalni sistem je isti kao i u primjeru 10.1, dok je poremećaj definisan vektorom $\mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} 1.5 \sin\left(\frac{8}{3}\pi t\right) h(t-1) & -h(t-2.5) & 0.5 \mathcal{T}(\pi t) h(t-3.5) \end{bmatrix}$.

Da bi poremećaj bio Lipšicovog tipa, što zahtjeva STA, Hevisajdova odskočna funkcija je ublažena aproksimacijom $h(t) = 1 - e^{t/\tau}$, gdje je $\tau = 5ms$.

Početno stanje sistema i period uzorkovanja *dead-beat* regulatora je ista kao u primjeru 10.1, pa je *dead-beat* regulator potpuno identičan. Međutim, perioda diskretizacija opservera poremećaja je manja, i iznosi $T_o = T/200$. U ovom slučaju, model $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o)$ koji se koristi za kompenzaciju poremećaja je definisan sa

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0.0000 & 0.0057 & 0.0000 & -0.0050 \\ 0 & 0.9997 & -0.0009 & -0.0000 & 0.0004 \\ 0 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0050 & -0.0000 \\ 0 & 0.0002 & -0.0000 & 0.9957 & -0.0050 \\ 0 & -0.0015 & 0.0000 & 0.0052 & 0.9966 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0006 & 0.0050 & -0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0220 & 0.0000 & -0.0083 \\ 0.0079 & -0.0000 & -0.0004 \end{bmatrix}.$$

Iz uslova $\mathbf{C}_o \mathbf{B}_o = \mathbf{I}$, matrica $\mathbf{C}_o$ se dobija kao

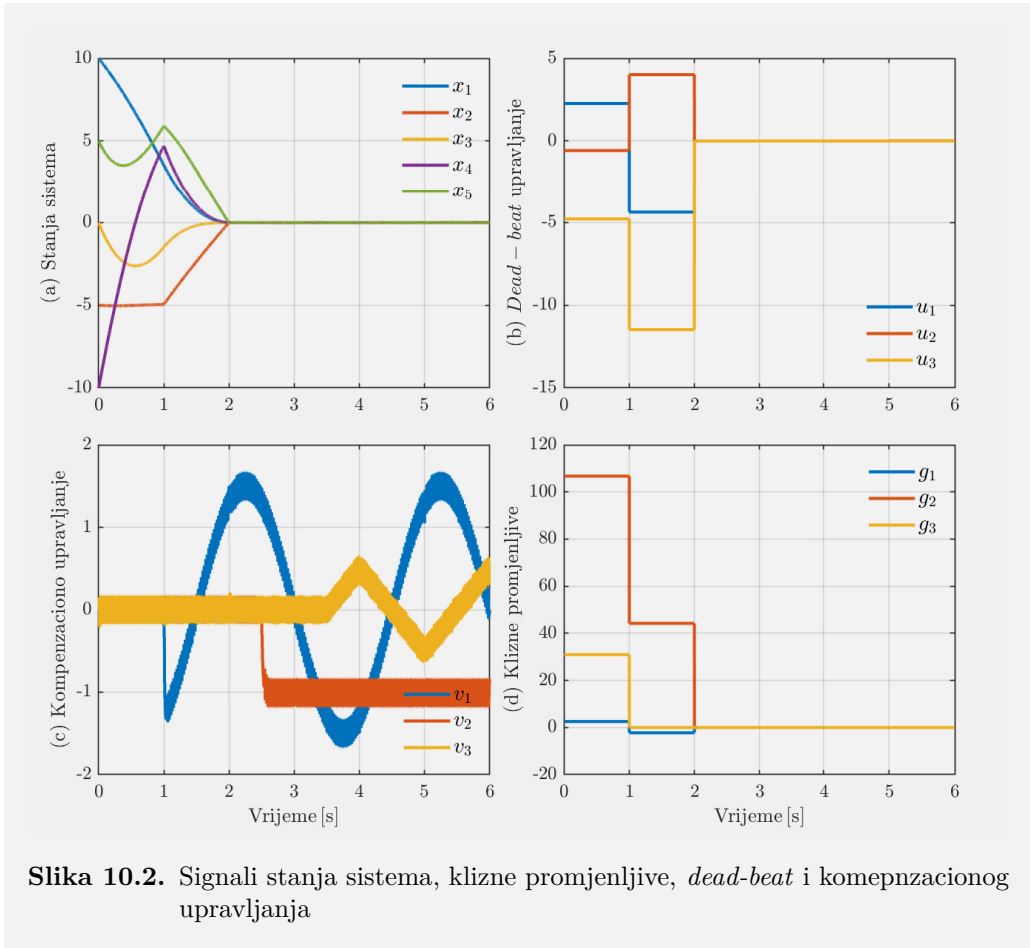
$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0.1062 & 0 & -6.7638 & 145.0837 \\ 0 & 200.0396 & 0 & -0.8115 & 17.3748 \\ 0 & 0.2963 & 0 & -138.3283 & 384.7553 \end{bmatrix}.$$

Parametri opservera poremećaja su usvojeni kao $\alpha = 0.15$ i $\beta = 30$, gdje parametar α zadovoljava uslov (10.35).

Slika 10.2(a) prikazuje stanja sistema koja konvergiraju u koordinatni početak u konačnom vremenu $2T$ uprkos djelovanju poremećaja. Slika 10.2(d) prikazuje klizne promjenljive odakle se vidi da projektovani regulator anulira klizne promjenljive u konačnom vremenu.

Dead-beat upravljanje je prikazano na slici 10.2(b), dok estimirane vrijednosti poremećaja, koje u stvari predstavljaju kompenzaciono upravljanje s negativnim znakom su date na slici. 10.2(c).

Upoređujući odzive sistema iz ova dva primjera i uzimajući u obzir da je amplituda sinusoidne komponente poremećaja trostruko veća u drugom primjeru, može se zaključiti da sistem s opserverom poremećaja na bazi STA iskazuje veću robusnost na poremećaje u sistemu a samim tim i veću tačnost.



10.2. Robusno upravljanje u KR proizvoljnog reda

Nakon raspredzavanja inicijalnog sistema (10.3) transformacijom u prostor pomoćnih promjenljivih (10.9) i (10.10), red dinamike sistema u KR se može proizvoljno podešavati odgovarajućim izborom reda KR q_i u svakom podsistemu, gdje važi $1 \leq q_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, m$.

Neka je željena dinamika sistema definisana spektrom polova P . Tada se skup P može podijeliti u m podskupova P_i , čiji su elementi polovi i -tog podskupa i ima ih N_i . Kako je $N_i = r_i - q_i$, tada mora da važi

$$0 \leq N_i \leq r_i, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10.39)$$

Za svaki podskup P_i formira se diferentna jednačina čiji su korijeni upravo elementi podskupa P_i . Željena diferentna jednačina i -tog podsistema je oblika

$$g_i(k + N_i) + \sum_{j=1}^{N_i} a_{i,j} g_i(k + N_i - j) = \Pi_i(g_i(k)) = 0, \quad (10.40)$$

gdje su $a_{i,j}$ realni brojevi.

Kako (10.40) definiše željenu dinamiku u KR, klizne promjenljive $s_i(k) \equiv s_i(\mathbf{g}(k))$ se definišu kao

$$s_i(k) = \Pi_i(g_i(k)), \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10.41)$$

Dakle, željena dinamika i -tog podsistema (10.40) je reda N_i , dok je red podsistema r_i . Slijedi da u podsistemu treba organizovati KR reda $q_i = r_i - N_i$ po kliznoj površi definisanoj sa (10.14).

U [68], vektor upravljanja $\mathbf{u}(k)$ koji obezbjeđuje željenu dinamiku sistema je određen na način koji će biti predstavljen u nastavku.

Vektor upravljanja $\mathbf{u}(k)$, koji u svakom od podsistema (10.9) i (10.10) ostvaruje KR reda q_i po kliznoj površi (10.14) ima formu

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{M}_d \mathbf{x}(k) - \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{v}(k), \quad (10.42)$$

gdje je matrica $\mathbf{M}_d$ definisana kao

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}_d^{q_1} \Pi_1(\mathbf{A}_d) \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}_d^{q_2} \Pi_2(\mathbf{A}_d) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}_d^{q_m} \Pi_m(\mathbf{A}_d) \end{bmatrix}, \quad (10.43)$$

matrica $\mathbf{W}_d$ definisana sa (10.12), a vektor $\mathbf{v}(k)$ je kompenzaciono upravljanje.

Ovdje je interesantno primijetiti da ukoliko se želi postići *dead-beat* odziv, tada su $q_i = r_i$ i $\Pi_i(\mathbf{A}_d) = \mathbf{I}$, ($i = 1, \dots, m$), te $\mathbf{M}_d$ postaje $\mathbf{M}$ iz (10.17).

Korištenjem definicije (10.41), pomoćnih promjenljivih (10.9) i (10.10), te željene dinamike (10.40), jednačine kliznih promjenljivih se mogu zapisati u sljedećoj matričnoj formi

$$\begin{bmatrix} s_1(k + q_1) \\ s_2(k + q_2) \\ \vdots \\ s_m(k + q_m) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{W}_d(\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(k)). \quad (10.44)$$

Zamjenom upravljanja (10.42) u (10.44) dobija se

$$\begin{bmatrix} s_1(k + q_1) \\ s_2(k + q_2) \\ \vdots \\ s_m(k + q_m) \end{bmatrix} = \mathbf{W}_d \mathbf{d}(k) - \mathbf{v}(k), \quad (10.45)$$

što pokazuje da je ostvareno raspredanje upravljanja jer na kliznu promjenljivu svakog podsistema utiče odgovarajuća komponenta kompenzacionog upravljanja. Zbog toga se dalje podsistemi mogu analizirati nezavisno jedan od drugoga. Na osnovu (10.45) može se pisati

$$s_i(k + q_i) = \mathbf{w}_{di} \mathbf{d}(k) - v_i(k) = \delta_i(k) - v_i(k), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (10.46)$$

gdje $\mathbf{w}_{di}$ predstavlja i -tu vrstu matrice $\mathbf{W}_d$.

Iz posljednje jednačine se može zaključiti da se originalni poremećaj $\mathbf{d}(k)$ preslikava na podsisteme kao poremećaj $\delta_i(k) = \mathbf{w}_{di} \mathbf{d}(k)$.

Poznato je da su elementi matrice $\mathbf{B}_d$ reda $\mathcal{O}(T)$. Na osnovu (10.12) se može zaključiti da će $\mathbf{w}_{di}$ takođe biti reda $\mathcal{O}(T)$, što znači da će poremećaji u podsistemima biti ograničeni ukoliko je originalni poremećaj ograničen i biće reda $\mathcal{O}(T)$. Tada važi da je $|\delta_i(k)| \leq \Delta_i, (k, i = 1, \dots, m)$, gdje je $\Delta_i = \mathcal{O}(T)$.

10.2.1. Projektovanje kompenzacionog upravljanja

Preostalo je odrediti kompenzaciono upravljanje $v_i(k)$ koje će obezbijediti konvergenciju klizne promjenljive $s_i(k)$ u što je moguće manju okolinu oko klizne površi $s_i(k) = 0$, uprkos djelovanju poremećaja i uzimajući u obzir da je relativni red klizne promjenljive q_i . Na osnovu (10.46) se može zaključiti da kompenzaciono upravljanje treba da bude neka vrsta estimacije poremećaja $\delta_i(k)$.

Za klizne promjenljive relativnog reda jedan, metoda [48] koristi prethodnu vrijednost poremećaja za njegovu kompenzaciju, koja se izračunava na osnovu modela sistema.

U [72] je pokazano da se prethodna vrijednost poremećaja može direktno izvući iz klizne promjenljive, korištenjem rekurzivne relacije koja zapravo predstavlja diskretno integraljenje klizne promjenljive. Ovaj pristup estimacije poremećaja je detaljno objašnjen u odjeljku 9.4 i ima dosta sličnosti s algoritmom upravljanja [63] koji nalikuje diskretnoj verziji STA.

STA upravljanja, koji je definisan za kontinualni domen i zahtijeva kliznu promjenljivu relativnog reda jedan, posjeduje dvije nelinearnosti. Prva je kvadratni koren apsolutne vrijednosti klizne promjenljive, a druga je signum funkcija klizne promjenljive. Prva nelinearnost obezbjeđuje konvergenciju sistema u konačnom vremenu, dok druga nelinearnost, koja je na ulazu u integracioni element, daje robusnost sistemu na poremećaje. U diskretnim sistemima ove nelinearnosti nisu nužno neophodne, naročito prva nelinearnost. Poznato je da ekvivalentno upravljanje obezbjeđuje dosezanje klizne površi u konačnom vremenu.

Sve ovo govori u prilog da kompenzaciono upravljanje koje se formira integraljenjem klizne promjenljive i te kako ima smisla u diskretnim sistemima upravljanja. Međutim, potrebno je sprovesti detaljniju analizu kada klizna promjenljiva ima relativni red veći od jedinice, kao što je slučaj sa (10.46). Vidi se da se poremećaj direktno reflektuje u kliznoj promjenljivoj za $v_i(k) = 0$, odnosno $s_i(k + q_i) = \delta_i(k)$. Diskretno integraljenje klizne promjenljive je realizovano Ojlerovom implicitnom metodom, što daje

$$v_i(k) = v_i(k - 1) + k_{\text{int},i} T s_i(k + q_i - 1), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (10.47)$$

gdje je $k_{\text{int},i}$ integralno pojačanje u i -tom podsistemu koje se može podešavati.

Na osnovu (10.47) se može izraziti vektor kompenzacionog upravljanja u obliku

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k - 1) + T \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{x}(k), \quad (10.48)$$

gdje su vrste matrice $\mathbf{\Lambda}_d$ definisane kao

$$\lambda_i = k_{\text{int},i} \mathbf{c}_i \mathbf{A}_d^{q_i-1} \Pi_i(\mathbf{A}_d).$$

Treba podsjetiti da se posmatraju samo sporo promjenljivi poremećaji koji djeluju kroz kanal upravljanja, te da se mogu smatrati konstantnim unutar malih perioda uzorkovanja. U teoremi iz [68] su izvedeni uslovi konvergencije klizne promjenljive pod djelovanjem opisanih poremećaja.

Ako se u i -tom podsistemu, čija je klizna promjenljiva data sa (10.46), primjeni kompenzaciono upravljanje (10.47), klizna promjenljiva će konvergirati nekoj ograničenoj okolini oko $s_i(k) = 0$ ukoliko važi

$$0 < k_{\text{int},i} < \frac{2}{T}. \quad (10.49)$$

Opisana kompenzaciona metoda daje iste rezultate kao pristup iz [48], ali je jednostavnija i manje računarski zahtijevna. Takođe, ova metoda nije osjetljiva na varijacije parametara modela, za razliku od metode [48].

Lahko je pokazati da ukoliko se želi izbjeći realni pol na negativnom dijelu realne ose u z -ravni (pol na Nikvistovoj granici) klizne promjenljive u odnosu na poremećaj, integralno pojačanje treba birati iz opsega

$$0 < k_{\text{int},i} \leq \frac{1}{T}. \quad (10.50)$$

Ovdje je važno navesti i neka važna svojstva koja su pokazana u [68]:

- Kada je $k_{\text{int},i}$ izabrano kao $k_{\text{int},i} = 1/T$, tačnost klizne promjenljive je reda $\mathcal{O}(T^2)$.
- U slučaju konstantnog poremećaja $\delta_i(k) = \Delta_i$, $k \geq 0$, klizna promjenljiva asimptotski teži nuli, tj. $\lim_{k \rightarrow \infty} s_i(k) = s_i(\infty) = 0$.

Treba istaći da će prethodna svojstva važiti i u slučaju sporo promjenljivog poremećaja, koji se može smatrati konstantnim unutar perioda uzorkovanja. Štaviše, za $k_{\text{int},i} = 1/T$, kombinacijom (10.46) i (10.47) dobija se $v_i(k) = \delta_i(k - 1)$, što na osnovu (10.46) daje $s_i(k + q_i) = \delta_i(k) - \delta_i(k - 1)$. Očigledno je da se za konstantne ili sporo promjenljive poremećaje dobija $s_i(k + q_i) = 0$, što ukazuje da klizna promjenljiva konvergira ka nuli za konačno vrijeme, odnosno da se dobija *dead-beat* odziv.

Relacijom (10.40) obezbjeđena je stabilnost pomoćnih promjenljivih g_i , koje su funkcije stanja sistema $\mathbf{x}$, samim tim je obezbjeđena stabilnost i promjenljivih stanja x_i . To znači da će promjenljive stanja x_i konvergirati ka nuli ukoliko klizne promjenljive s_i teže nuli. Ako klizne promjenljive teže nekoj ograničenoj okolini oko $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, onda će i promjenljive stanja x_i težiti nekoj ograničenoj okolini oko koordinatnog početka.

Zamjenom upravljanja (10.42) u sistem (10.3), uz kompenzaciono upravljanje (10.48), dolazi se do sljedećeg opisa kompletnog sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \left(\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{M}_d \right) \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}_d \left(\mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{v}(k) - \mathbf{d}(k) \right), \quad (10.51)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + T \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{x}(k). \quad (10.52)$$

Prvi član zbira u (10.51) predstavlja konvencionalnu povratnu spregu po stanju, gdje je matrica pojačanja te sprege data kao $\mathbf{K}_d = \mathbf{W}_d^{-1} \mathbf{M}_d$. Njome se postiže da spregnuti prenos ima N željenih stabilnih sopstvenih vrijednosti, dok su preostale $n - N$ sopstvene vrijednosti jednake nuli.

Slično kao i kod kontinualnog pristupa projektovanju klizne površi primjenom dekompozicije viševarijabilnog sistema na više sistema s jednim ulazom (vidi odjeljak 6.2.2), u zavisnosti od izbora N mogu se u principu identifikovati tri slučaja. Za $N = 0$ dobija se sistem s konačnim vremenom smirivanja (*dead-beat* odziv), za $0 < N < n$ se dobija dinamika proizvoljnog reda primjenom KRVR i za $N = n$ se dobija klasična povratna sprega po stanju.

Drugi član u zbiru (10.51) predstavlja mehanizam kompenzacije poremećaja upravljanjem (10.52). Za $k_{\text{int},i} = 1/T$, dobija se $v_i(k) = \delta_i(k-1) = \mathbf{W}_{di} \mathbf{d}(k-1)$. Tada će kompletni vektor izgledati kao $\mathbf{v}(k) = \mathbf{W}_d \mathbf{d}(k-1)$, pa će drugi sabirak u (10.51) biti $\mathbf{B}_d (\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}(k-1))$. Kako je $\mathbf{B}_d$ reda $\mathcal{O}(T)$ i $\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}(k-1)$ takođe reda $\mathcal{O}(T)$, onda će $\mathbf{B}_d (\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}(k-1))$ biti reda $\mathcal{O}(T^2)$. Ovo je u skladu s nalazima u [65], gdje je pokazano da se stacionarno stanje vektora stanja spregnutog sistema nalazi u okolini $\mathcal{O}(T^2)$.

Osnovna razlika prikazanog pristupa i nekih drugih metoda je da se ovdje ekvivalentnom upravljanju ne pridodaje dodatna prekidna komponenta upravljanja $\alpha \text{sign}(s_i)$, jer kod diskretnih sistema jedinstveno (ekvivalentno) upravljanje ostvaruje i doseganje klizne površi i egzistenciju KR na njoj.

Primjer 10.3

Prikaz procedure projektovanja i performanse predloženog sistema upravljanja u ovom odjeljku će ponovo biti demonstrirane na već korištenom modelu aviona u prethodnim primjerima. I ovdje je odabran period uzorkovanja $T = 1s$, pa je diskretni model aviona definisan matricama $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d)$ kao u primjeru 10.1.

U ovom primjeru, početno stanje sistema je odabrano kao $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 100 & -15 & 0 & -5 \end{bmatrix}^\top$. Poremećaj koji deluje na sistem je oblika $\mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} h(t-15) & \mathcal{T}(0.15t)h(t-10) & 0.5 \sin(\frac{\pi}{4}\pi t) h(t-5) \end{bmatrix}^\top$.

Kako su indeksi kontrolabilnosti već određeni ($r_1 = r_2 = 2, r_3 = 1$), procedura izbora pomoćnih promjenljivih i raspredanja sistema je ista kao i u prethodnim primjerima. Matrice $\mathbf{C}_d$ i $\mathbf{W}_d$ su određene u primjeru 10.1. Može se zaključiti da su prvi i drugi podsistem drugog reda, dok je treći podsistem prvog reda. Sljedeći korak je izabrati red KR q_i u svakom od podsistema u skladu s redom željene dinamike.

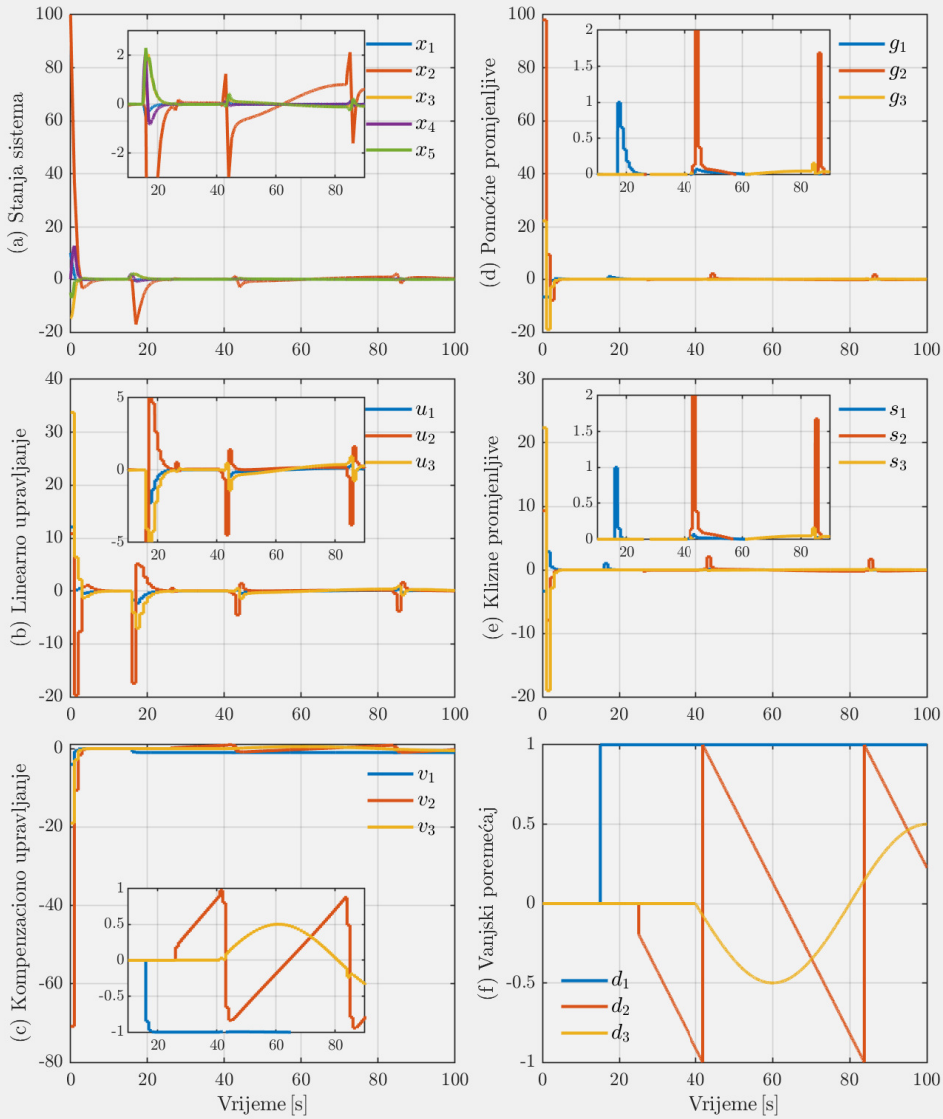
Neka je željena dinamika spregnutog sistema prvog reda, koja je definisana sopstvenom vrijednošću 0.5. Tada je spektar sopstvenih vrijednosti matrice stanja sistema (10.51) definisan s $\{0.5, 0, 0, 0, 0\}$. To znači da će sopstvene vrijednosti prvog podsistema biti $\{0.5, 0\}$, drugog $\{0, 0\}$ i trećeg $\{0\}$. Na osnovu ovoga, imajući u vidu indekse kontrolabilnosti, može se zaključiti da je KR u prvom podsistemu prvog reda ($q_1 = 1$), u drugom podsistemu drugog reda ($q_2 = 2$) i u trećem podsistemu prvog reda ($q_3 = 1$). Na osnovu ovoga se iz (10.43) može odrediti matrica $\mathbf{M}_d$ kao

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} 0.0274 & 0.0671 & 0.3197 & 0.2203 & -0.2564 \\ 7.4063 & 2.0694 & 14.955 & 3.4838 & -8.8158 \\ -1.2227 & -0.3019 & -2.0887 & -0.2356 & 2.0847 \end{bmatrix}.$$

Kompenzaciono upravljanje se formira na osnovu (10.48), gdje se matrica $\mathbf{\Lambda}_d$, za izabrana pojačanja na integratorima $k_{\text{int}_1} = k_{\text{int}_2} = k_{\text{int}_3} = 0.85$, nalazi kao

$$\mathbf{\Lambda}_d = \begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0016 & 0.2499 & 0.3003 & -0.0511 \\ 6.2953 & 0.1610 & 5.7309 & 0.9754 & -2.9660 \\ -1.0393 & 0.2469 & -0.5989 & -1.2249 & 1.2635 \end{bmatrix}.$$

Ukupno upravljanje koje deluje na sistem se formira korištenjem (10.42). Ispitivanje ponašanja projektovanog sistema upravljanja je sprovedeno simulacijom. Na slici 10.3 su dati signali razmatranog sistema upravljanja, odakle se može zaključiti da projektovano vektorsko upravljanje ostvaruje upravljački zadatak i dovodi promjenljive stanja sistema iz date početne vrijednosti u ograničenu okolinu koordinatnog početka uprkos djelovanju poremećaja.



Slika 10.3. Signali stanja sistema, upravljanja u KR željenog reda i kompenzacionog upravljanja, pomoćnih promjenljivi i kliznih promjenljivi

Na 10.3(b) je prikazano upravljanje koje obezbjeđuje KR željenog reda iz koga se može uočiti da ne posjeduje prekidačku prirodu što značajno redukuje treperenje. Ovdje treba istaći da neželjene oscilacije kao posljedica numerički računanja uvijek postoje. S druge strane, robusnost sistema na poremećaje se postiže uvođenjem kompenzacionog upravljanja koje je prikazano na 10.3(c).

Ovo upravljanje uvodi u sistem integralno djelovanje što rezultuje kompletnom kompenzacijom konstantnih poremećaja, dok su sporo promjenljivi poremećaji značajno oslabljeni. Takođe se vidi da se informacija o poremećaju (koji je prikazan na slici 10.3(f)) može uočiti u oblicima ovih signala. Pomoćne promjenljive su prikazane na 10.3(d) iz kojih se vidi da predloženi pristup ostvaruje raspregnuto upravljanje, gdje svako upravljanje utiče samo na jednu pomoćnu promjenljivu. Na kraju, 10.3(e) su date klizne promjenljive, koje konvergiraju ka nuli i formiraju kvazi-klizni domen čija širina zavisi od magnitude poremećaja i perioda uzorkovanja.

★ ★ ★ ★ ★

Literatura

- [1] S.V. Emelyanov. A method to obtain complex control law by using only error signal or controlled variable and its derivative. *Automatic and Remote Control*, 18(10):873–885, 1957.
- [2] E.A. Barbashin, A. Tabueva, and R.M. Eidinov. On the stability of variable structure control systems when sliding conditions are violated. *Automation and Remote Control*, 7:81–86, 1963.
- [3] S.V. Emelyanov and V.I. Utkin. On stability of a class of variable structure systems. *Engineering Cybernetics*, (2):115–117, 1964.
- [4] V.I. Utkin. On compensation of the forced component in the motion of control systems with variable structure. *Engineering Cybernetics*, (4):167–171, 1965.
- [5] B. Draženović. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3):287–295, 1969.
- [6] A. Šabanović. *Sarajevska škola automatike*. Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, 2023. ISBN 978-9926-410-85-8.
- [7] V.I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2):212–222, 1977.
- [8] V.I. Utkin. Application of equivalent control method to the systems with large feedback gain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3):484–486, 1978.
- [9] A. Šabanović and D.B. Izosimov. Application of sliding modes to induction motor control. *IEEE Transactions on Industry Applications*, (1):41–49, 1981.
- [10] A. Šabanović, D.B. Izosimov, F. Bilalović, and O. Mušić. Sliding modes in controlled motor drives. In *Control in Power Electronics and Electrical Drives 1983*, pages 133–138. Elsevier, 1984.

- [11] A. Šabanović and F. Bilalović. Sliding mode control of AC drives. *IEEE Transactions on Industry applications*, 25(1):70–75, 1989.
- [12] A. Šabanović, N. Šabanović, and K. Ohnishi. Sliding modes in power converters and motion control systems. *International Journal of Control*, 57(5):1237–1259, 1993.
- [13] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [14] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [15] A. Levant. Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9):1447–1451, 2001.
- [16] J. Davila, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai. Finite-time state observation for non-linear uncertain systems via higher-order sliding modes. *International Journal of Control*, 82(8):1564–1574, 2009.
- [17] J. Song, Y. Niu, and Y. Zou. Finite-time stabilization via sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3):1478–1483, 2016.
- [18] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):241–246, 1998.
- [19] V.I. Utkin. Discussion aspects of high-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3):829–833, 2015.
- [20] E. Bernuau, D. Efimov, W. Perruquetti, and A. Polyakov. On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1866–1901, 2014.
- [21] S. Ding, A. Levant, and S. Li. Simple homogeneous sliding-mode controller. *Automatica*, 67:22–32, 2016.
- [22] E. Cruz-Zavala and J.A. Moreno. Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238, 2017.

-
- [23] M.K. Khan and S.K. Spurgeon. Robust MIMO water level control in interconnected twin-tanks using second order sliding mode control. *Control Engineering Practice*, 14(4):375–386, 2006.
- [24] A. Levant and M. Livne. Uncertain disturbances attenuation by homogeneous multi-input multi-output sliding mode control and its discretisation. *IET Control Theory & Applications*, 9(4):515–525, 2015.
- [25] A. Pisano. On the multi-input second-order sliding mode control of nonlinear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(15):1765–1778, 2012.
- [26] D. Hernández, F. Castanos, and L. Fridman. Pole-placement in higher-order sliding-mode control. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):1386–1391, 2014.
- [27] B. Peruničić-Draženić, B. Veselić, S. Huseinbegović, and Č. Milosavljević. Higher order sliding mode control design with desired dynamics for multi-input LTI systems. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, pages 3589–3594. IEEE, 2019.
- [28] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Draženović, and S. Huseinbegović. Sliding manifold design for higher-order sliding mode control of linear systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19(8):2652–2663, 2021.
- [29] Č. Milosavljević. Izbor periode odabiranja kod jednog sistema drugog reda sa promenljivom strukturom i diskretnom obradom informacije. *Tehnika - Elektrotehnika*, (11):1651–1653, 1980.
- [30] Č. Milosavljević. Uslovi stabilnosti kliznog režima sistema drugog reda sa promenljivom strukturom i diskretnom obradom informacije. *Automatika*, (5–6):269–273, 1980.
- [31] Č. Milosavljević. *Neki problemi diskretne realizacije zakona upravljanja sistema sa promenljivom strukturom*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1982.
- [32] Č. Milosavljević. General conditions for existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems. *Automatic Remote Control*, 46:307–314, 1985.

- [33] Y. Dote and R. Hoft. Microprocessor base sliding mode controller for DC motor drives. In *IEEE Industry Application Annu. Meeting Conf. Rec.*, pages 641–645. IEEE, 1980.
- [34] R.B. Potts and X. Yu. Discrete variable structure system with pseudo-sliding mode. *The ANZIAM Journal*, 32(4):365–376, 1991.
- [35] X. Yu and R.B. Potts. Computer-controlled variable-structure systems. *The ANZIAM Journal*, 34(1):1–17, 1992.
- [36] S.Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak. On the stability of discrete-time sliding mode control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(10):930–932, 1987.
- [37] U. Kotta, S.Z. Sarpturk, and Y. Istefanopulos. Comments on " On the stability of discrete-time sliding mode control systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(9):1021–1022, 1989.
- [38] K. Furuta. Sliding mode control of a discrete system. *Systems & Control Letters*, 14(2):145–152, 1990.
- [39] H. Sira-Ramirez. Non-linear discrete variable structure systems in quasi-sliding mode. *International Journal of Control*, 54(5):1171–1187, 1991.
- [40] B. Draženović. *Multivarijabilni sistemi s promenljivom strukturom*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1970.
- [41] V.I. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [42] Z. Bučevac. *Digitalni diskretni sistemi sa kliznim režimima*. PhD thesis, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1985.
- [43] A. Salihbegović. *Prilog analizi i sintezi diskretno realizovanih sistema sa prekidnim upravljanjem*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1985.
- [44] Z.M. Bučevac. Discrete-time variable structure control systems-multivariable linear plant case. *Facta Universitatis - Mech. Autom. Control Robot*, 2(9): 983–994, 1999.

-
- [45] M.E. Magana and S.H. Zak. The control of discrete-time uncertain dynamical systems. 1987.
 - [46] S.V. Drakunov and V.I. Utkin. On discrete-time sliding modes. In *Nonlinear Control Systems Design 1989*, pages 273–278. Elsevier, 1990.
 - [47] W.C. Su, S.V. Drakunov, and U. Ozgüner. Sliding mode control in discrete time linear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 26(2):267–270, 1993.
 - [48] W.C. Su, S.V. Drakunov, and U. Ozguner. An $O(T^2)$ boundary layer in sliding mode for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):482–485, 2000.
 - [49] W.C. Su, S.V. Drakunov, and U. Ozgüner. Implementation of variable structure control for sampled-data systems. In *Robust control via variable structure and Lyapunov techniques*, pages 87–106. Springer, 2005.
 - [50] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa. Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 42(2):117–122, 1995.
 - [51] J.Y. Hung, W. Gao, and J.C. Hung. Variable structure control: A survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):2–22, 2002.
 - [52] G. Bartolini, A. Ferrara, and V.I. Utkin. Adaptive sliding mode control in discrete-time systems. *Automatica*, 31(5):769–773, 1995.
 - [53] A. Bartoszewicz. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 45(4):633–637, 1998.
 - [54] K. Furuta. VSS type self-tuning control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):37–44, 2002.
 - [55] G. Golo and Č. Milosavljević. Robust discrete-time chattering free sliding mode control. *Systems & Control Letters*, 41(1):19–28, 2000.
 - [56] B. Draženović, Č. Milosavljević, and B. Veselić. Comprehensive approach to sliding mode design and analysis in linear systems. *Advances in sliding mode control: concept, theory and implementation*, Springer, pages 1–19, 2013.
 - [57] J. Ackermann and V.I. Utkin. Sliding mode control design based on Ackermann’s formula. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):234–237, 2002.

- [58] V. Acary and B. Brogliato. Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems. *Systems & Control Letters*, 59(5):284–293, 2010.
- [59] S. Koch and M. Reichhartinger. Discrete-time equivalents of the super-twisting algorithm. *Automatica*, 107:190–199, 2019.
- [60] X. Yang, X. Xiong, Z. Zou, and Y. Lou. Semi-implicit Euler digital implementation of conditioned super-twisting algorithm with actuation saturation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 70(8):8388–8397, 2022.
- [61] B. Brogliato, A. Polyakov, and D. Efimov. The implicit discretization of the supertwisting sliding-mode control algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(8):3707–3713, 2019.
- [62] Č. Milosavljević, M. Petronijević, B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, and S. Huseinbegović. Robust discrete-time quasi-sliding mode based nonlinear PI controller design for control of plants with input saturation. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 21(3):31–41, 2019.
- [63] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, S. Huseinbegović, and M. Petronijević. Discrete-time sliding mode control of linear systems with input saturation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 30(3), 2020.
- [64] V.I. Utkin and J. Shi. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4591–4596. IEEE, 1996.
- [65] K. Abidi, J.X. Xu, and Y. Xinghuo. On the discrete-time integral sliding-mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(4):709–715, 2007.
- [66] S. Huseinbegović, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and Č. Milosavljević. Higher order sliding mode based dead-beat control with disturbance compensation for multi-input lti systems. In *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 309–314. IEEE, 2018.
- [67] S. Huseinbegović, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and Č. Milosavljević. Disturbance observer based dead-beat control of multi-input systems with

- unknown disturbances and bounded inputs using discrete-time higher order sliding mode. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(8): 3310–3329, 2021.
- [68] B. Peruničić-Draženović, Č. Milosavljević, S. Huseinbegović, B. Veselić, and M. Petronijević. A robust control design for multi-input LTI systems using discrete-time arbitrary order sliding mode approach. *Journal of the Franklin Institute*, 361(10):106931, 2024.
- [69] A. Šabanović, L.M. Fridman, and S.K. Spurgeon. *Variable structure systems: from principles to implementation*, volume 66. IET, 2004.
- [70] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and D. Mitić. A new design of servomechanisms with digital sliding mode. *Electrical Engineering*, 89:233–244, 2007.
- [71] B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, and Č. Milosavljević. High-performance position control of induction motor using discrete-time sliding-mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11):3809–3817, 2008.
- [72] M. Lješnjanić, B. Draženović, Č. Milosavljević, and B. Veselić. Disturbance compensation in digital sliding mode. In *2011 IEEE EUROCON-International Conference on Computer as a Tool*, pages 1–4. IEEE, 2011.
- [73] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, and B. Veselić. Discrete-time velocity servo system design using sliding mode control approach with disturbance compensation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(2): 920–927, 2012.
- [74] S. Qu, X. Xia, and J. Zhang. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(7):3502–3510, 2013.
- [75] J.S. Han, T.I. Kim, T.H. Oh, and S.H. Lee. Effective disturbance compensation method under control saturation in discrete-time sliding mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(7):5696–5707, 2019.
- [76] B. Veselić, B. Draženović, and Č. Milosavljević. Integral sliding manifold design for linear systems with additive unmatched disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9):2544–2549, 2015.

- [77] B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, and Č. Milosavljević. Improved discrete-time sliding-mode position control using Euler velocity estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(11):3840–3847, 2010.
- [78] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and M. Petronijević. High-performance discrete-time chattering-free sliding mode-based speed control of induction motor. *Electrical Engineering*, 99(2):583–593, 2017.
- [79] M. Petronijević, Č. Milosavljević, B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, and S. Huseinbegović. Robust cascade control of electrical drives using discrete-time chattering-free sliding mode controllers with output saturation. *Electrical Engineering*, 103(4):2181–2195, 2021.
- [80] B. Peruničić-Draženović, Č. Milosavljević, S. Huseinbegović, B. Veselić, and M. Petronijević. Discrete-time sliding mode control for electrical drives and power converters. In *Women in Power: Research and Development Advances in Electric Power Systems*, pages 443–466. Springer, 2023.
- [81] S. Huseinbegović. *Primena digitalnih kliznih režima u upravljanju vjetrotrogeneratorima sa statičkim pretvaračima*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 2015.
- [82] S. Huseinbegović, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, Č. Milosavljević, and M. Petronijević. Predictive discrete-time sliding mode based direct power control for grid-connected energy conversion systems. *IET Control Theory & Applications*, 17(10):1354–1366, 2023.
- [83] M. Petronijević, Č. Milosavljević, B. Veselić, S. Huseinbegović, and B. Peruničić. Discrete time quasi-sliding mode-based control of LCL grid inverters. *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, 36(1):133–158, 2023.
- [84] P. Ignaciuk and A. Bartoszewicz. Dead-beat and reaching-law-based sliding-mode control of perishable inventory systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 59(1):39–49, 2011.
- [85] A. Bartoszewicz and J. Žuk. Discrete time sliding mode flow controller for multi-source single-bottleneck connection-oriented communication networks. *Journal of Vibration and Control*, 15(11):1745–1760, 2009.

-
- [86] A.F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Matematicheskii sbornik*, 93(1):99–128, 1960.
- [87] W. Gao and J.C. Hung. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):45–55, 1993.
- [88] C.J. Fallaha, M. Saad, H.Y. Kanaan, and K. Al-Haddad. Sliding-mode robot control with exponential reaching law. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 58(2):600–610, 2010.
- [89] A. Bartoszewicz. A new reaching law for sliding mode control of continuous time systems with constraints. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37(4):515–521, 2015.
- [90] C.M. Kwan. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 31(2):303–307, 1995.
- [91] C.C. Wen and C.C. Cheng. Design of sliding surface for mismatched uncertain systems to achieve asymptotical stability. *Journal of the Franklin Institute*, 345(8):926–941, 2008.
- [92] H.H. Choi. An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1634–1638, 2003.
- [93] F. Castanos and L. Fridman. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5):853–858, 2006.
- [94] A. Polyakov and A. Poznyak. Invariant ellipsoid method for minimization of unmatched disturbances effects in sliding mode control. *Automatica*, 47(7):1450–1454, 2011.
- [95] B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, and Č. Milosavljević. A sliding hyper-plane design method for a class of linear systems with unmatched disturbances. In *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 142–147. IEEE, 2010.

- [96] O.M.E. El-Ghezawi, A.S. Zinober, and S.A. Billings. Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach. *International Journal of Control*, 38(3):657–671, 1983.
- [97] B. Veselić, B. Draženović, and Č. Milosavljević. Sliding manifold design for linear systems with unmatched disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1920–1938, 2014.
- [98] B. Veselić, B. Draženović, and Č. Milosavljević. Sliding manifold design for linear systems with scalar unmatched disturbances. In *Complex Systems: Relationships between Control, Communications and Computing*, pages 539–556. Springer, 2016.
- [99] F.L. Lewis, D. Vrabie, and V.L. Syrmos. *Optimal control*. John Wiley & Sons, 2012.
- [100] J.A. Moreno and M. Osorio. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE conference on decision and control*, pages 2856–2861. IEEE, 2008.
- [101] J. Rivera, L. Garcia, C. Mora, J.J. Raygoza, and S. Ortega. Super-twisting sliding mode in motion control systems. *Sliding mode control*, 1:237–254, 2011.
- [102] V.I. Utkin, A. Poznyak, Y. Orlov, and A. Polyakov. Conventional and high order sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 357(15):10244–10261, 2020.
- [103] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830, 2005.
- [104] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Draženović, and S. Huseinbegović. Podešavanje dinamike kliznih režima višeg reda kod linearnih sistema sa jednim ulazom. In *Zbornik 63. Konferencije za elektroniku, telekomunikacije, računarstvo, automatiku i nuklearnu tehniku, ETRAN 2019*. ETRAN, 2019.
- [105] B. Draženović, S. Huseinbegović, Č. Milosavljević, and B. Veselić. Higher order sliding mode based finite-time order zeroing control for MIMO LTI systems. In *2017 XXVI International Conference on Information, Communication and Automation Technologies (ICAT)*, pages 1–6. IEEE, 2017.

-
- [106] B. Peruničić-Draženović, Č. Milosavljević, B. Veselić, and S. Huseinbegović. New VSC based finite time control of LTI systems. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 234–239. IEEE, 2016.
- [107] B. Veselić, B. Draženović, Č. Milosavljević, and S. Huseinbegović. Prilog primeni kliznih režima višeg reda u stabilizaciji sistema u konačnom vremenu. In *Zbornik 61. Konferencije za elektroniku, telekomunikacije, računarstvo, automatiku i nuklearnu tehniku, ETRAN 2017*. ETRAN, 2017.
- [108] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Draženović, and S. Huseinbegović. Projektovanje klizne površi za klizne režime višeg reda u linearnim sistemima sa više ulaza. In *Zbornik 64. Konferencije za elektroniku, telekomunikacije, računarstvo, automatiku i nuklearnu tehniku, ETRAN 2020*. ETRAN, 2020.
- [109] L. Kronecker. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1225–1237, 1890.
- [110] R.E. Kalman. Kronecker invariants and feedback. In *Ordinary Differential Equations*, pages 459–471. Elsevier, 1972.
- [111] J. O'Reilly. The discrete linear time invariant time-optimal control problem—An overview. *Automatica*, 17(2):363–370, 1981.
- [112] M. Mueller. Normal form for linear systems with respect to its vector relative degree. *Linear algebra and its applications*, 430(4):1292–1312, 2009.
- [113] P. Falb and W. Wolovich. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6):651–659, 2003.
- [114] A. Morse and W. Wonham. Triangular decoupling of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(4):447–449, 1970.
- [115] D. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2):190–197, 1966.
- [116] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer, 2014.

- [117] A. Chalanga, S. Kamal, L.M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J.A. Moreno. Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6):3677–3685, 2016.
- [118] G. Herbst and R. Madonski. *Active Disturbance Rejection Control: From Principles to Practice*. Springer Nature, 2025.
- [119] M.R. Stojić. *Digitalni sistemi upravljanja*. Elektrotehnički fakultet u Beogradu, 1998.
- [120] Christopher Edwards and Sarah K Spurgeon. Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information. *International Journal of Control*, 62(5):1129–1144, 1995.
- [121] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and D. Mitić. Sampled data quasi-sliding mode control strategies. In *2006 IEEE International Conference on Industrial Technology*, pages 2640–2645. IEEE, 2006.
- [122] A. Šabanović and K. Abidi. Sliding mode based piezoelectric actuator control. In *2004 IEEE International Conference on Industrial Technology, 2004. IEEE ICIT'04.*, volume 1, pages 425–430. IEEE, 2004.
- [123] B. Veselić, B. Peruničić-Draženović, D. Mitić, and Č. Milosavljević. Sliding mode based discrete-time disturbance estimator using input output approach. In *Proceedings of IEEE sponsored VIII International Workshop on Variable Structure Systems (VSS'04)*, 2004.
- [124] B. Veselić. *Primena digitalnih kliznih režima u sintezi robustnih servoistema za koordinisano praćenje složenih trajektorija*. PhD thesis, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, 2006.
- [125] A. Bondaref, N. Kostyleva, and V.I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic observer. *Automation Remote Control*, 46:679–684, 1985.
- [126] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić, and D. Mitić. Discrete-time sliding mode based design of positional servo-system. In *Proceedings of the VIII International Workshop on Variable Structure Systems*, 2004.

-
- [127] Č. Milosavljević, D. Mitić, and B. Veselić. Sliding mode based digital servo-system design. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 6(4):37–42, 2004.
- [128] O. Huber, V. Acary, and B. Brogliato. Enhanced matching perturbation attenuation with discrete-time implementations of sliding-mode controllers. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 2606–2611. IEEE, 2014.
- [129] L. Ma, D. Zhao, and S.K. Spurgeon. Disturbance observer based discrete time sliding mode control for a continuous stirred tank reactor. In *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 372–377. IEEE, 2018.
- [130] G. Milosavljević and M. Petronijević. Disturbance compensation in discrete-time sliding mode control – A comparative study. *International Journal of Electrical Engineering and Computing*, 8(1), 2024.
- [131] T. Hagiwara and M. Araki. Controllability indices of sampled-data systems. *International Journal of Systems Science*, 19, 1988.
- [132] R.E. Kalman. On the general theory of control systems. In *Proceedings first international conference on automatic control, Moscow, USSR*, pages 481–492, 1960.
- [133] V. Kucera. The structure and properties of time-optimal discrete linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(4):375–377, 1971.
- [134] B. Leden. Multivariable dead-beat control. *Automatica*, 13(2):185–188, 1977.
- [135] Y. Zhao and H. Kimura. Multivariable dead-beat control with robustness. *International Journal of Control*, 47(1):229–255, 1988.
- [136] S.K. Spurgeon. On output deadbeat control of discrete-time multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(6):644–648, 1989.
- [137] S. Urikura and A. Nagata. Ripple-free deadbeat control for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(6):474–482, 1987.
- [138] M.E. Salgado, D.A. Oyarzún, and E.I. Silva. H_2 optimal ripple-free deadbeat controller design. *Automatica*, 43(11):1961–1967, 2007.

- [139] H. Ito. Effectiveness of multirate input control in deadbeat servomechanism. *European Journal of Control*, 8(4):326–340, 2002.
- [140] Y.S. Hung and A.G.J. MacFarlane. *Multivariable feedback: a quasi-classical approach*. Springer, 1982.
- [141] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003.
- [142] H. Ghane and M.B. Menhaj. Eigenstructure-based analysis for non-linear autonomous systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 32(1):21–40, 2015.

★ ★ ★ ★ ★

